情報科学講座 A・2・7

A. 共通基礎理論
A・2 情報論理学

北川敏男編



量子論的エントロピー

—情報理論の函数解析的基礎2—

梅垣壽春
大矢雅則 共著

共立出版株式会社

“情報科学講座”の序

情報科学は機械・生体および人間社会における情報の生成・伝達・改造・蓄積・利用についての一般原理を攻究する基幹科学である．情報理論の建設，情報現象の解明，情報方式の開発の三つの領域にわたり，相互間の緊密な協力によってその発展をはかることは，現代科学技術の進歩にとって，必須の要請となっている．

21世紀の人類のビジョンは，情報革命のもとに築かれなければならない．20世紀前半における物理科学の進展は，やがて生物科学，人文科学，社会科学に大きな影響を及ぼし，これらの科学分野の飛躍的発展が期待されている．この時代において，それらの相互間の連結は，情報科学を通じて行なわれるべきものであり，情報科学の進歩は，これらの諸分野の発展に強力な推進力となるものと期待される．科学・技術の研究が，人類社会に占める役割は年とともに加重しているが，科学・技術の研究のために共通の基盤を提供するものは，計算機といい，ドキュメンテーションといい，情報科学の負担すべき任務に属する．

情報科学の組織的研究体制を整備するとともに，情報科学について系統的な学習を行ない，広範な教養を培い，わが国における情報科学の水準を世界のそれに遅れないようにすることは，今日の急務である．

このような趣旨から，情報科学講座（刊行当初全 63 巻）を刊行しようというのである．講座の意図するところは，情報科学の体系的集成であるから，理論・素子・組織・生体情報・装置の全分野にわたり，基礎的な解説から，第一線の研究の紹介にまで及ぶように努めた次第である．

わが国の情報科学の水準が世界をリードし卓越する日の来ることを待望しつつ，この目的のために，情報科学講座がいささかなりとも寄与できることを，心から念願するものである．

(1966 年 9 月記，1977 年 1 月一部変更)

編集委員一同

序

本書「量子論的エントロピー」は，同じ著者達による前巻「確率論的エントロピー」(本講座 A·2·6) に続くものである．この２巻は副題に示してあるように，それぞれ「情報理論の函数解析的基礎」１および２として，一貫した共通の方針のもとに，解説されている．多年にわたる独自の研究成果をも，豊富に取り入れ，引続きこの力作を学界に提供された梅垣壽春教授，大矢雅則博士のご努力に対して，深甚の敬意を表したいと思う．

前巻が古典力学系の諸概念を測度論的に取り扱ったのに対して，本巻では量子系の運動を念頭においた力学系へ拡張することを論題としている．エントロピーの概念そのものについては，前者において著者達により十分解説され，編集者としても序文において，やや広汎な見地から，それに対する時代の関心に触れたので，ここでは繰り返さない．

むしろ，次の三つのトピックスにわたることを付言しておきたい．第一のトピックスは量子論と情報科学との両学問分野にまつわる科学史上の因縁を回顧することである．これが量子論的エントロピーというやや見慣れない本巻の論題の一つの由来を物語ることになろうかと思う．第二のトピックスは，量子論的エントロピーを解説するために本書で採用されている接近方法に関連する数学界の風景についてである．ここでは作用素論，確率論，代数学などの広範な分野にわたっている．そして第三のトピックスは，著者達自身の研究志向と研究成果とに関連した本書の構成についての紹介である．

前巻「確率論的エントロピー」では，米国の C. Shannon(1916—　) および A. Kolmogorov (1903—　) を中心とするソ連の cybernetician 達の貢献を見た．いうまでもなく，両氏とも，情報理論の生誕・発展に大きな業績を残した．

情報科学への道としては，本講座の諸巻で度々述べられているように，この2人のほかに，R. A. Fisher (1890—1962)，N. Wiener (1894—1964) および J. von Neumann (1903—1957) の3人の先達の業績を位置付けてみることができる．奇くも，この3人の学者はともに量子論にそれぞれ関与していた事実を見出す．この事実に通じて第一のトピックスについて述べる．

まずR. A. Fisherについてであるが，進化論，集団遺伝学という方向で巨大な業績を残した彼は，情報学に近いところでは，推測理論の定礎者として不朽の功績に輝いているのであるが，彼の創建した変量分析法において，基本的な役割を果たす独立変量成分への分解およびそれらの自由度という理論構成は，おそらく，彼が，Cambridge大学の学窓において接したであろう初期の量子論の理論構図に深く影響され示唆された結果であろうといわれている．尤度法，最尤法，十分統計量，情報量という諸概念をもって推測理論を構成したのがR. A. Fisher の理論である．これを K. Pearson (1857—1936) の記述統計学が「科学の文法」と称して，静力学のモーメント法を発想源にとったのと比較するとき，際立った対照がここに見出される．

次に N. Wiener であるが，今世紀30年代より登場して，数学界の常識となった線形空間論は，若年のころ Wiener 自身も実はポーランド学派の Banach 達とは独立に導入し考察し，関数解析的方法は彼にとっては大切な学問的な出発点であった．米国の先輩 W. Gibbs の統計力学の影響のもとに関数解析的方法とLebesgue 積分とを結びつけたのがWiener 空間論であり，ここにWiener のサイバネティックスの数学的基礎が形成された．つまり Wiener 空間は，不規則運動の一般調和解析という具体的な展開を，実現するための場として数学的基礎を用意し，確率過程論の実質的な内容をつくりあげたのであった．その彼にとって量子論の数学的形式化は終生の関心事であった．ただし Wiener は次に述べる J. von Neumann とは違って，Wiener 空間すなわち Brown 運動の形成する関数族である Wiener 空間を，量子論の数学的基底にとるという構想を青年のころから晩年まで抱きつづけた．1958 年 MIT および御自宅訪問の機会，私も親しくその意図を伺ったことがある．

最後に J. von Neumann であるが，量子力学の数学的基礎として，Hilbert 空間論をとり，ここにおける作用素論を展開した赫々たる業績は，学界周知の通りである．この作用素論は，とくに観測理論との関連において，もろもろの情報表現形式の入力情報の処理に当面しなければならない，現代の情報学にとって，示唆するところ極めて多い理論であると思われる．

von Neumann の作用素論の理論は，量子論理，量子論的エントロピーの定義，連続幾何の導入につながり，von Neumann 代数，量子論的な確率場等々の概念を生み出した．一般的な学界風景としては実験の提供する豊富な物理事実の集積・転変に対処して説明に多忙な理論物理学者のいういわゆる理論と，現代数学者の公理主義的な演繹体系のもとの自律的な展開とは，ともすれば，意外に大きな距離感をもたらしめることが稀でない．数学者 von Neumann の切り開いた上述の路線にも一時期そのような憾みがあったことは事実である．第2次世界戦争をはさむ十数年の空白ののちであったが，しかし，その後，数学者側の活潑な参加協力がみられ，その結果として，その物理学的な意義づけも，幾分実現し，あるいは期待されるに到った．欧米各国に伍してわが国でも，京大数理解析研究所 荒木不二洋教授および KMS (Kubo-Martin-Schwinger) 条件に名を連ねる慶大 久保亮五教授の物理学的な業績があり，作用素環の数学理論の本格的な展開として，九大理学部 冨田稔教授および現 UCLA 竹崎正道教授の輝かしい数学的業績がある．これらの事実群は，上述の第二のトピックスをめぐる数学界の風景の現況を，いささかなりとも説明するのに役立つであろうか．

さて，第三のトピックスとして，著者達の業績の紹介にふれたいと思う．梅垣教授が，非可換確率論の構築を意図されたのは，1953 年頃のことであったが，1954 年 von Neumann 代数上に条件付確率の概念を導入することに成功したきっかけに，非可換 Martingale (1956)，十分統計量 (1959) を論ぜられ，Kullback-Leibler 情報量，相対エントロピー (1962) を von Neumann 代数上に導入するに到った．これらは本巻第 9～11 章および付章の各所において解説され引用されている通りであり，確率，情報，エントロピーの基本部分の

形式化が体系的に整備されているのを見る．これらは von Neumann 代数の方法を純粋数学の領域にとどめず，具体的な情報現象の理論的解明に適用することを，当初より研究方針として明確に設定して推進された梅垣教授の特徴ある研究の成果であるといわねばならない．

共著者のもう１人大矢雅則博士の業績は，現代数学と現代物理学の交流を，作用素代数論によって理論的に実現しようとする方向をとられている．ここでは，物理系 Σ に対して（ｉ）観測量の集合を C*-代数 $\mathscr{A}$ で，（ii）観測値を与える状態の集合を C*-代数上の線形汎関数の集合 $\mathscr{S}$ で，(iii)系の時間的発展を系の自己同型群 α で，それぞれ表し，物理系 Σ に対して（$\mathscr{A}, \mathscr{S}, \alpha$）という表現をとることが，理論構成の基本となっている．本巻では，C*-力学系間におけるエントロピー導入（第８章第５節），von Neumann 代数における十分性；KMS 条件および相対エントロピー（第９章第４節），量子系における合成的状態と相対エントロピーの定式化（第 11 章），さらに Markov 型核をふくむよう合成的状態を C*-力学系への拡張（第 11 章および付章）があり，さらに量子系の状態変化を与える作用素 (channel) のエルゴード特性（第 11 章）に及んでいる．このように，とくに本巻に到っては，梅垣・大矢両著者達の独自の研究成果が，豊富にとり入れられ，しかも，全体が現代の関数解析学的方法によって整理され，透徹した解説によって提供されている．付章には，その数学的基礎を補う簡潔な要約が与えられているのは多くの読者にとって極めて有用であろう．

著者達が自序で述べられているように，著者達のこの理論の射程は，理論的整備という成果にとどまるものでない．さらに具体的な応用へもわたりうるものであろう．本書にはないが，von Neumann 代数を超えて，関数解析的方法の適用を意図されているときく．梅垣教授を中心とする応用函数解析研究会の全国的なグループによる将来の発展に期待したいと思う．Spline 関数による近似理論，その応用としての高速度 CT スキンナー，DNA の二重ラセンの数学構造など，情報工学への寄与の拡大がすでに展開されているときく．

コンピューターの未来像が論議される今日，Josephson 素子回路，光コンピ

ューター，さらには生物コンピューターなど，量子統計力学的な考察が理論的に要請される論題が出現しつつあるのが現状である．このような時期において，量子統計力学に密着して導入された量子論的エントロピーの理論を，現代数学の諸方法を駆使して，体系的に整備したのが本書である．

観測・推測から計算・通信・制御にわたる理論情報学の守備範囲は広大である．それらを包括する統一理論への待望は，高度情報化時代の要請に，照応して当然切実なものがある．他方かって，情報科学の生誕に関与した前述の諸先達の業績が，現時点においては，統一的に関連づけられる方向において，見直され発展がはかられうる気運に向かいつつあるように思われる．

このように時代の要請と学界の潮流とに関連してみるとき，情報学の統一理論への一つの志向を示唆するものとしても見られる本書の存在意義は大きい．本書の精読を，情報科学に関心と素養をもつ多数の読者に期待してやまない．

1984年1月

編集者　北　川　敏　男

自　　　序

現代の数学には，具体的な現象を記述する手段を供給することが要求され，また，それに伴う内的必然性から既存の概念を拡張することが要求されるが，これらに応えることは決して容易なことではない．例えば，測度論的に取り扱われた古典力学系の諸概念を，量子論を基盤とした力学系へ量子系の運動を念頭において，拡張することは，系の構造の違いから数学的階層も異なり，単に現象の正しい記述を可能にするばかりでなく，数学自身の内的発展においても重要なことなのである．このような拡張は，Hilbert 空間で成立する命題をそのまま Banach 空間へ拡張するとか，確率測度を σ-有限測度に置き換えるなどという，誰でも思いつく一般化とは本質的に異なるものなのである．こういった現代数学のあり方から，数学がひとつの分野で孤立せず，他の様々の分野との相関の下で発展することの必要性が最近とみに強調されてきている．しかしながら，本気になってそのような仕事に取り組んでいる数学者は決して多くなく，それゆえ，様々な分野の橋掛かりとなる数理的概念はあまり多くは存在していない．この数少ない概念のひとつが本書で取り上げているエントロピーである．

混沌に目鼻立ちを付けることが学門の主たる任務であるが，第１巻で詳しく論じたように，エントロピーこそ混沌そのものを定量化する最初で，かつ，今のところ最も有力な概念である．すなわち，対象となる系を記述する状態がいかに乱雑なものであるかを，言い換えれば，その系のもつ不確定さを，表現するものがエントロピーなのである．また，このように無秩序を顕すということは，裏を返せば，系の秩序の程度を顕していると見ることもできる．したがって，エントロピーはある物理系の示すある種の“秩序”を研究する場合に大き

な役割を演じてきたのである（相転移の研究，非可逆現象の研究など）.

本書も第1巻“確率論的エントロピー”同様エントロピーがその中心であるが，とくにGauss信号過程および，量子系のエントロピーについて論ずる．半導体，レーザー等，現代科学の核となっている諸技術は量子論をひとつのベースとしており，したがって，量子系のエントロピーは数学的研究対象として興味あるものという以上に，応用という観点からみても重要なものであるが，今回は紙面の都合上具体的な応用は割愛し，もっぱらその基礎となる数学的取り扱いに話を限定した.

なお，本書では第1巻で論じた事柄，並びにそこで使われた数学はある程度仮定してある．また，量子系のエントロピーに関して，厳密に調べられてきたことはできるだけ網羅しようとしたため，かなり高度な数学も必要となったが，それらは付章で詳しく説明したつもりである．ただし，第7章と第8章のほとんどの節，および第9章〜第11章の約半分の節はHilbert空間に関する知識（付章1）があれば十分である．（各章と付章の相互関連は目次の後に表としてまとめてあるので参照して頂きたい.）

本書のように量子系のエントロピーを，様々な角度から数学的厳密性に留意して著した書物は他に類例のないものと思われるが，本書を通して読者がエントロピーの多様性に興味をもち，新たなる研究を進めて頂ければ幸いである.

最後に，本書を執筆するに当たり，第1巻同様長期にわたって多大な御支援を頂いた北川敏男先生に深い感謝の意を表したい．また，共立出版社の佐藤邦久氏と安原　勇氏にはいろいろな面でお骨折りをして下さり深謝する次第である．更に，清書をしてくれた東京工業大学および，東京理科大学の大学院生諸君にも謝意を表したい.

昭和58年8月

梅垣　壽春
大矢　雅則

目　　　次

第7章　信号過程の数理解析

第8章　量子論的エントロピー

第9章　相対エントロピーと WYDLU 凹性

凡　　例 (本書を読むために)

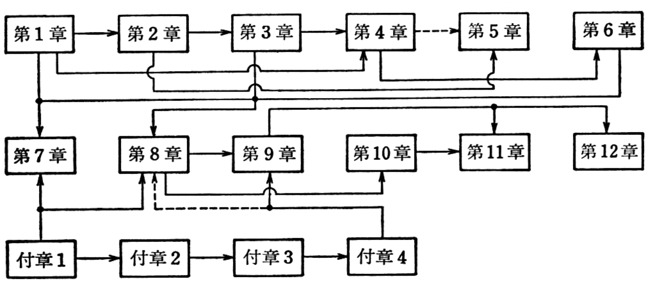
(1)　記号 "≡" は左を右で定めることを意味し, "$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$" は左を右で定義することを意味する.

(2)　"A $\Longleftrightarrow$ B" は A は B と同値 (同等) であると読み, "A $\Longrightarrow$ B" は A ならば B であると読む.

(3)　文中では付章を引用する場合は, 例えば (付章 1.1) あるいは (付章 1.1 参照) などと記す. ここでは付章は本巻の付章を意味する.

(4)　参考文献の引用は, 例えば von Neumann の [1] は, [V. 1] とする.

(5)　第 1 巻, 第 2 巻の各章の相互関連は次のようになっている.



第1巻の目次

第7章　信号過程の数理解析

この章では，第6章と同様 Hilbert 空間を基調にして議論を進める．

前章では，2次のモーメントを有するランダム信号の一般的な議論を行ったが，ここでは，7.1 節でとくにそれが Gauss 型信号過程である場合を論ずる．7.2 節では，Gauss 測度の構成及び Gauss 測度の対と相対エントロピーに関する基本定理を述べる．7.3 節では Hilbert 空間における Bochner の定理を述べ，さらに Gauss 測度と有限トレースをもつ作用素との対応について論ずる．最後に 7.4 節でメッセージ空間上の定常情報源上で離散的な信号過程からなる von Neumann 代数の構成を行い函数解析の一典型を見ることにする．なお，この章の議論は第1巻の第6章と深く係わっている．

7.1 Gauss 系

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の実数値をとる確率変数 ξ が **Gauss 型**であるとは

$$\mu\circ\xi^{-1} \ll \text{Lebesgue 測度}$$

であり，かつ密度函数が

$$\mu(\xi^{-1}(dt))/dt = (1/\sqrt{2\pi\sigma})\exp(-(t-m)^2/2\sigma^2) \qquad (7.1)$$

であるときをいう．ここで

$$m_\xi \equiv E(\xi), \qquad \sigma_\xi{}^2 \equiv E(\xi^2 - m_\xi{}^2)$$

であり，m_ξ を ξ の**平均値**，σ_ξ を ξ の**分散**という．

$\vec{\xi}$ が $\boldsymbol{R}^n$-値確率変数，すなわち $\vec{\xi}=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ で各 ξ_j は $\boldsymbol{R}$-値確率変数であるとき，$\vec{\xi}$ を **n 次元確率ベクトル**または，**n 次元確率変数**という．$m_j \equiv m_{\xi_j} = E(\xi_j)$ として $\vec{m} \equiv (m_1, \cdots, m_n) \in \boldsymbol{R}^n$ を $\vec{\xi}$ の**平均ベクトル**，$v_{jk} \equiv E((\xi_j - m_j)(\xi_k - m_k))$ として $n\times n$-行列 $V=(v_{jk})$ を $\vec{\xi}$ の**共分散行列**という．一次元の場合と同様 $\vec{\xi}$ が絶対連続な分布（$\boldsymbol{R}^n$ 上の確率測度）$\mu_\xi(\cdot)=\mu(\vec{\xi}^{-1}(\cdot))$

をもち，その密度函数が

$$\frac{\mu(\vec{\xi}^{-1}(d\vec{t}))}{d\vec{t}}=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det(V)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\langle\vec{t}-\vec{m},V^{-1}(\vec{t}-\vec{m})\rangle\right) \tag{7.2}$$

であるとき $\vec{\xi}$ を n 次元 **Gauss 確率変数**，または単に **Gauss 型**であるという．ここで $\langle\ ,\rangle$ は $\boldsymbol{R}^n$ における内積，V^{-1} は V の逆行列である．

また，n 次元確率変数の特性函数は一種の Fourier 変換によって定義される：

$$\varphi_\xi(\vec{\lambda})\equiv\int_\Omega \exp i\langle\vec{\lambda},\vec{\xi}(\omega)\rangle\mu(d\omega)=E(\exp i\langle\vec{\lambda},\vec{\xi}(\cdot)\rangle)$$

$$=\int_{\boldsymbol{R}^n}\exp i\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle\mu(\vec{\xi}^{-1}(dt)).$$

このとき，次の定理が以下の議論の基本となる［H 6，K 7］．

〈定理 7.1〉　n 次元確率変数 $\vec{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ に対して次の条件は互いに同値である．

（1）　$\vec{\xi}$ は Gauss 型である．

（2）　$\varphi_\xi(\vec{\lambda})=\exp\left(i\langle\vec{\lambda},\vec{m}\rangle-\frac{1}{2}\langle\vec{\lambda},V\vec{\lambda}\rangle\right)$.

（3）　$\vec{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ の成分の任意の一次結合 $\sum\alpha_k\xi_k$ はすべて Gauss 型確率変数である．

註　ξ が実数値確率変数のとき条件（2）は

(2′)　$E(e^{i\lambda\xi})=\int_\Omega\exp(i\lambda\xi(\omega))\mu(d\omega)=\exp\left(i\lambda m-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right)$

となって定理の命題は同値性（1）$\Longleftrightarrow$（2′）で置き換えられる．

確率変数系 $\tilde{\xi}=\{\xi_\gamma\,;\,\gamma\in\Gamma\}$ において，任意の有限個の一次結合 $\sum\alpha_k\xi_k$ $(\alpha_k\in\boldsymbol{R})$ が Gauss 型確率変数のとき $\tilde{\xi}$ を **Gauss 系**という．とくに $\tilde{\xi}$ が $\{\xi_n\,;\,n=1,2,\cdots\}$ とか $\{\xi_t\,;\,t\in R\}$ のとき $\tilde{\xi}$ を各々**離散的な**，及び**連続パラメータをもつ Gauss 過程**という．〈定理 7.1〉によって Gauss 系の定義は次のようにも述べられる：確率変数系 $\tilde{\xi}=\{\xi_\gamma\}$ が **Gauss 系**であるとは，任意の

n に対して n 次元確率変数 $(\xi_{\gamma_1}, \cdots, \xi_{\gamma_n})$ が Gauss 型のときをいう.

確率空間 Ω 上の Gauss 確率変数はすべて Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ の要素となるが, $L^2(\Omega)$ のある部分空間 $\mathcal{G}$ において $\mathcal{G}$ のすべての要素が Gauss 型確率変数であるとき $\mathcal{G}$ を **Gauss 型部分空間**という.

〈定理 7.2〉 $\mathcal{G}$ が Gauss 型部分空間ならば $L^2(\Omega)$ における閉苞 $\bar{\mathcal{G}}$ も Gauss 型部分空間である. したがって, Gauss 系 $\tilde{\xi}=\{\xi_\gamma\,;\,\gamma\in\Gamma\}$ の生成する $L^2(\Omega)$ の閉部分空間 ($\mathcal{G}_\xi$ と書く) は Gauss 型である.

証明 $\eta\in\bar{\mathcal{G}}$ に対して $\{\eta_n\}\subset\mathcal{G}$ を $\|\eta_n-\eta\|_2\to 0$ ($L^2(\Omega)$ー収束) とする. 各 η_n は Gauss 型であるから

$$E(e^{i\lambda\eta_n})=\exp\left(i\lambda m_n-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_n{}^2\right). \tag{7.3}$$

ここで $m_n\equiv E(\eta_n)$, $\sigma_n{}^2\equiv E(\eta_n{}^2-m_n{}^2)$. 簡単な計算により, $n\to\infty$ のとき

$$m_n=E(\eta_n)\to E(\eta)=m_\eta,\quad \sigma_n\to\sigma_\eta=(E(\eta^2-m^2))^{1/2}$$

がわかるから (7.3) の両辺の極限をとると容易に

$$E(e^{i\lambda\eta})=\exp\left(i\lambda m_\eta-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_\eta{}^2\right)$$

が成立し, η が Gauss 型となり, $\bar{\mathcal{G}}$ は Gauss 型閉部分空間であることが知られる. ▌

$\mathcal{B}^{(n)}$ を n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ の Borel 集合体とし, ξ を n 次元確率変数とするとき ξ を可測にする最小の σ 集合体を $\sigma(\vec{\xi})$ で表す : $\sigma(\vec{\xi})=\vec{\xi}^{-1}(\mathcal{B}^{(n)})$. ($\sigma(\vec{\xi})$ は ξ の分散 σ_ξ とは異なるもの!)

さらに, 一般に確率変数系 $\tilde{\xi}=\{\xi_\gamma\,;\,\gamma\in\Gamma\}$ においても同様の記法

$$\sigma(\xi)\equiv\sigma(\{\sigma(\xi_\gamma)\,;\,\gamma\in\Gamma\})$$

と用いる. 2つの確率ベクトル $\vec{\xi}$ と $\vec{\eta}$ が**独立**であるとは $\sigma(\vec{\xi})$ と $\sigma(\vec{\eta})$ が独立, すなわち $A\in\sigma(\vec{\xi})$ と $B\in\sigma(\vec{\eta})$ は常に $\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B)$ を満たすときをいう. ここで $\vec{\xi}$ が m 次元, $\vec{\eta}$ が n 次元ベクトルのとき, $\vec{\zeta}=(\vec{\xi},\vec{\eta})$ は $m+n$ 次元確率ベクトルであり,

"$\vec{\xi}$ と $\vec{\eta}$ が独立 $\Longleftrightarrow$ $\mu(\vec{\zeta}^{-1}(C\times D))(=\mu(\vec{\xi}^{-1}(C)\cap\vec{\eta}^{-1}(D)))$
$=\mu(\vec{\xi}^{-1}(C))\mu(\vec{\eta}^{-1}(D))$ が $\forall C\in\mathcal{B}^{(m)}$, $\forall D\in\mathcal{B}^{(n)}$
に対して成立する",

がいえる．これに関して次の有用な定理が示めされる．

〈定理 7.3〉 $\vec{\xi}$ と $\vec{\eta}$ が独立のための必要十分条件は

$$E(\exp(i\langle\vec{\alpha},\vec{\xi}\rangle)\exp(i\langle\vec{\beta},\vec{\eta}\rangle))=E(\exp(i\langle\vec{\alpha},\vec{\xi}\rangle))E(\exp(i\langle\vec{\beta},\vec{\eta}\rangle)) \tag{7.4}$$

がすべての $\vec{\alpha}\in\boldsymbol{R}^m$, $\vec{\beta}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して成立することである．

証明　必要性：(7.4) の左辺

$$=\int\exp\left(i\left\langle\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\vec{\xi}(\omega)\\ \vec{\eta}(\omega)\end{pmatrix}\right\rangle\right)\mu(d\omega)$$

$$=\iint\exp\left(i\left\langle\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{y}\end{pmatrix}\right\rangle\right)\mu(\vec{\xi}^{-1}(d\vec{x}),\vec{\eta}^{-1}(d\vec{y}))$$

$$=\int\exp(i\langle\vec{\alpha},\vec{x}\rangle)\mu(\vec{\xi}^{-1}(d\vec{x}))\int\exp(i\langle\vec{\beta},\vec{y}\rangle\mu(\vec{\eta}^{-1}(d\vec{y}))$$

$$=\int\exp(i\langle\vec{\alpha},\vec{\xi}(\omega)\rangle\mu(d\omega)\int\exp(i\langle\vec{\beta},\vec{\eta}(\omega)\rangle)\mu(d\omega)$$

$$=E(\exp(i\langle\vec{\alpha},\vec{\xi}\rangle))E(\exp(i\langle\vec{\beta},\vec{\eta}\rangle))=(7.4)\ の右辺.$$

十分性は上の証明より明らかであろう．▌

Gauss 型確率変数はすべて Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ の要素である．ここで，$L^2(\Omega)$ における直交性（$\perp$ で表す）と独立性の関係が次のように示めせる．

〈定理 7.4〉 実数値確率変数の対 ξ,η に対して ξ と η が独立であることと $(\xi-m_\xi)\perp(\eta-m_\eta)$ かつ $\alpha\xi+\beta\eta$ が Gauss 型であることは同値．ここで，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$.

証明　前定理によって，ξ と η が独立であることと次式は同値：

$$E(\exp(i(\alpha\xi+\beta\eta)))=E(e^{i\alpha\xi})E(e^{i\beta\eta}). \tag{7.5}$$

ゆえに，ξ と η が独立のとき，(7.5) の両辺は

$$\exp\left(i\alpha m_\xi - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_\xi{}^2\right)\exp\left(i\beta m_\eta - \frac{1}{2}\beta^2\sigma_\eta{}^2\right)$$
$$= \exp\left(i(\alpha m_\xi + \beta m_\eta) - \frac{1}{2}(\alpha^2\sigma_\xi{}^2 + \beta^2\sigma_\eta{}^2)\right) \tag{7.6}$$

に等しい．一方，再び独立性を用いて

$$E((\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)) = E(\xi\eta) - 2m_\xi m_\eta + m_\xi m_\eta = 0.$$

これを (7.6) に代入すると，(7.6) の最後の式は

$$\exp(i(\alpha m_\xi + \beta m_\eta)) - \frac{1}{2}(\alpha^2\sigma_\xi{}^2 + \beta^2\sigma_\eta{}^2 + 2\alpha\beta E(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta))$$
$$= \exp\left(i\left\langle\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}m_\xi\\ m_\eta\end{pmatrix}\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, V\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right\rangle\right)$$

となる．ここで，

$$V = \begin{pmatrix} E((\xi - m_\xi)^2) & E((\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)) \\ E((\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta) & E((\eta - m_\eta)^2) \end{pmatrix}.$$

ゆえに，〈定理 7.1〉によって $\alpha\xi + \beta\eta$ は Gauss 型である．逆に，$\alpha\xi + \beta\eta$ が Gauss 型で $E(\xi\eta) = m_\xi m_\eta$ ならば，上の証明を逆にたどれば式 (7.5) を得る．∎

この直交性を用いて，次の系がすぐいえる．

〈系 7.5〉 (1) Gauss 型実確率変数列 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ の要素が互いに独立ならば確率ベクトル $\vec{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ は Gauss 型であり，これの共分散行列は対角行列である．

(2) Gauss 型確率ベクトル $\vec{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ の共分散行列が対角行列ならば列 $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ の要素は互いに独立である．

さらに〈定理 7.3〉を用いて次のことが示めせる：

〈定理 7.6〉 Gauss 型閉部分空間 $\mathcal{G}$ の各要素の平均値が 0 であるとき，$\mathcal{G}$ における 2 つの部分空間 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ に対して次の関係が成立する．

(1) $\mathcal{K} \perp \mathcal{L} \iff$ すべての $\xi \in \mathcal{K}$ と $\eta \in \mathcal{L}$ が独立．

（2） $P_{\mathcal{K}}\xi=E(\xi|\sigma(\mathcal{K})),\ \forall\xi\in\mathcal{G}.$

ここで $P_{\mathcal{K}}$ は $\mathcal{G}\to\mathcal{K}$ なる射影作用素である.

証明 （1）は前定理のいい換えである.

（2）の証明：すべての $\xi\in\mathcal{G}$ で $(\xi-P_{\mathcal{K}}\xi)\perp\mathcal{K}$，これと〈定理 7.1〉を用いて，$\xi-P_{\mathcal{K}}\xi$ と $A\in\sigma(\mathcal{K})$ は独立であり

$$\int_A(\xi-P_{\mathcal{K}}\xi)d\mu=\mu(A)E(\xi-P_{\mathcal{K}}\xi)=\mu(A)\cdot 0=0.$$

したがって，

$$\int_A E(\xi|\sigma(\mathcal{K}))d\mu=\int_A P_{\mathcal{K}}\xi d\mu,\quad A\in\sigma(\mathcal{K}).$$

よって，結論をうる. ▌

さてここで第6章で扱ったエネルギー有限なランダム信号過程 $\xi(t)=\xi(t,\cdot)$ を議論しよう．これは離散的な，または連続なパラメータをもつ確率過程で，各 $\xi(t,\cdot)$（t は固定）は $L^2(\Omega)$ の要素である．$\xi(t)$ が Gauss 過程であるとき，$\xi(t)$ を Gauss 信号過程ということもある．（単一な信号 $\xi(\cdot)$ が Gauss 型確率変数のときも Gauss 信号という.）

Gauss 信号過程を K–L 展開（第6章参照）した場合はどうなるか，これに関して次の定理をうる.

〈定理 7.7〉 平均が0でかつ連続なランダム信号過程 $\xi(t)=\xi(t,\cdot)\ (a\leqq t\leqq b)$ が Gauss 過程であれば，K–L 展開における確率変数列 $\{\xi_k(\cdot)\ ;\ k=1,2,\cdots\}$ は離散的な Gauss 過程で，各要素は互いに独立である.

証明 第1巻第6章の〈定理 6.14〉と〈定理 6.16〉を適用すると：$\xi(t)$ は $L^2(\Omega)$–ノルムで $[a,b]$ 上で連続であり，式（6.13）の固有函数 r_k は $r_k\in C[a,b]$ である．したがって $L^2(\Omega)$–値として閉区間 $[a,b]$ 上での連続函数 $\xi(t,\cdot)r_k(t)/\sqrt{\lambda_k}$ の Bochner 積分の値 $\xi_k(\cdot)$ は次の極限で与えられる．区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta=(a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b)$ に対して

$$\eta_k(\Delta,\cdot)\equiv\sum_{j=1}^{n}\xi(t_j,\cdot)r_k(t_j)(t_j-t_{j-1})\in L^2(\Omega)$$

とおくと，各 k に対して $E(|\xi_k(\cdot)-\eta_k(\Delta,\cdot)|^2)\to 0\,(|\Delta|\equiv\max_j|t_j-t_{j-1}|\to 0)$. $\{\xi(t,\cdot)\,;\,a\leq t\leq b\}$ は Gauss 過程であるからこれの一次結合の $\eta_k(\Delta,\cdot)$ も Gauss 型である．したがって〈定理 7.2〉によって極限 ξ_k もそうである．この構成から，$\{\xi_k\}$ は $\{\xi(t)\,;\,a\leq t\leq b\}$ によって生成される $L^2(\Omega)$ の閉部分空間に含まれる．ゆえに，$\{\xi_k(\cdot)\,;\,k=1,2,\cdots\}$ は Gauss 過程であることがわかる．再び，〈定理 6.16〉によって $\{\xi_k\}$ は $L^2(\Omega)$ の ONS になるから独立性もいえる．▮

確率過程 $\tilde{\xi}=\{\xi_t\,;\,t\geqq t_0\}$ が**独立増分性**をもつとは，任意の有限列 $t_0<t_1<\cdots<t_n\,(t_k\in\boldsymbol{R})$ に対して，$\xi_{t_{j+1}}-\xi_{t_j}$ が $\xi_{t_{k+1}}-\xi_{t_k}\,(j+1\leqq k)$，及び ξ_{t_0} とつねに独立のときをいう．$\tilde{\xi}$ が離散的のときも同様に定義される．

〈定理 7.8〉 平均 0 の Gauss 過程 $\tilde{\xi}=\{\xi_t\,;\,t\in\boldsymbol{R}\}$ が martingale であるための必要条件は $\tilde{\xi}$ が独立増分性をもつことである．

証明 十分性：$s<t$ とする．〈定理 7.6〉により，

$$E(\xi_t|\sigma(\xi_r\,;\,r\leqq s))=E(\xi_t-\xi_s|\sigma(\xi_r\,;\,r\leqq s))+\xi_s$$
$$=P_s(\xi_t-\xi_s)+\xi_s=\xi_s.$$

ここで P_s は $L^2(\Omega)$ からその閉部分空間 $\mathcal{K}_s(=\{\xi_r\,;\,r\leqq s\}$ によって生成) への射影作用素，また $P_s(\xi_t-\xi_s)=0$ は $\xi_t-\xi_s$ と $\mathcal{K}_s$ が独立なことによる．

必要性：$r\leqq s\leqq u$ とすると martingale の性質を用いて

$$\langle\xi_s-\xi_r,\xi_u-\xi_t\rangle=\int(\xi_s-\xi_r)(\xi_u-\xi_t)d\mu$$
$$=\int(\xi_s-\xi_r)\cdot E((\xi_u-\xi_t)|\sigma(\xi_s))d\mu$$
$$=\langle\xi_s-\xi_r,\xi_s-\xi_s\rangle=0.$$

すなわち，$(\xi_s-\xi_r)\perp(\xi_u-\xi_t)$ であり，また双方ともに平均が 0 の Gauss 型確率変数であるから〈定理 7.4〉によって $\xi_s-\xi_r$ と $\xi_u-\xi_t$ は独立である．故に結論を得た．▮

Gauss 過程 $B(t)=B(t,\cdot)$ $(t\geqq 0)$ が平均 0 で共分散函数が

$$E(B(s)B(t))=s\wedge t\,(\equiv\min(s,t))$$

であるとき $B(t)$ を **Brown 運動**（あるいは **Wiener 過程**）という．

〈定理 7.9〉 Brown 運動 $B(t)$ は L^2-連続で独立増分性をもつ，したがって martingale である．

証明　連続性は〈定理 6.15〉からいえる．$0 \leqq r < s < t < u$ に対して

$$\begin{aligned}\langle B(s)-B(r), B(u)-B(t)\rangle &= E((B(s)-B(r))\cdot(B(u)-B(t)))\\ &= E(B(s)B(u))-E(B(s)B(t))\\ &\quad -E(B(r)B(u))+E(B(r)\cdot B(t))\\ &= s\wedge u - s\wedge t - r\wedge u + r\wedge t\\ &= s-s-r+r=0.\end{aligned}$$

さらに $B(s)-B(r), B(u)-B(t)$ はともに平均値が 0 の Gauss 確率変数であるから，〈定理 7.4〉によって独立性が示された．▌

〈定理 7.10〉 Brown 運動の K-L 展開：Brown 運動 $B(t)\,(0 \leqq t \leqq T)$ は，$E(B(s)B(t))$ に対応する積分作用素の固有値を λ_n とすると，

$$B(t,\cdot)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2T}t\right)\sqrt{\lambda_n}B_n(\cdot). \tag{7.7}$$

ここで $B_n(\cdot)$ は $L^2(\Omega)$ の ONS で次の Bochner 積分によって与えられる：

$$B_n(\cdot)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^T B(s,\cdot)\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2T}s\right)ds.$$

また (7.7) の和 $\sum_{n=1}^{\infty}$ は $L^2(\Omega)$-ノルムで $t\in[0,T]$ に関して一様収束である．（この定理の証明は Mercer の定理（6.3 節，定理 6.14）の適応例に $K(s,t)=s\wedge t$ の展開式を適用すれば簡単である.）

7.2　Gauss 測度と相対エントロピー

前節の初めに Gauss 確率ベクトル $\vec{\xi}$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ 上の確率分布 $\mu(\vec{\xi}^{-1}(\cdot))$ を対応させたが，一般に Gauss 過程 $\{\xi(t)\,;\,t\in T\}\,(T\subset\boldsymbol{R})$ を与えたとき，任意の有限個の $\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$ に対して，n 次元ベクトル $\vec{m}=(m_1,\cdots,m_n)\in\boldsymbol{R}^n$，$m_k\equiv E(\xi(t_k))$ と $n\times n$ 行列 $V_n=(v_{jk})$，$v_{jk}\equiv E(\xi(t_j)\xi(t_k))$ に函数

$$g_{(t_1,\cdots,t_n)}(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^n\det(V_n)}\exp\left(-\frac{1}{2}\langle\vec{x}-\vec{m},\, V_n{}^{-1}(\vec{x}-\vec{m})\rangle\right)$$

を対応させる．次に積空間 $\boldsymbol{R}^T$（T 上で定義された実数値函数の全体）の有限次元な筒集合を

$$C=C(t_1,\cdots,t_n)\equiv\{\omega=\prod_t\omega_t\in\boldsymbol{R}^T\,;\,(\omega_{t_1}\cdots\omega_{t_n})\in B\}$$

（B はある n-次元 Borel 集合）で表し，これらの筒集合に対し，

$$\mu_0(C)\equiv\int_B g_{(t_1\cdots t_n)}(\vec{x})d\vec{x}$$

とおくと，μ_0 は $\boldsymbol{R}^T$ 上の筒集合全体からなる集合体 $\mathcal{C}_0$ 上で完全加法性を満たす集合函数となり，これが Kolmogorov の拡張定理によって $\mathcal{C}_0$ によって生成される $\boldsymbol{R}^T$ の σ 集合体 $\mathcal{F}$ 上の測度 μ に一意に拡張される．そしてこの μ は可測空間（$\boldsymbol{R}^T,\mathcal{F}$）上の確率測度になる．このとき μ を **Gauss 過程 $\xi(t)$ から導かれた Gauss 測度**または，単に **Gauss 測度**という．これは初めに Gauss 過程 $\xi(t)$ が与えられた場合であったが，初めに非負実数列 $\{m_t\,;\,t\in T\}$ 及び 2 変数の実数値函数 $v(s,t)$（$s,t\in T$）が与えられ，任意の $t_1,\cdots,t_n\in T$（n も任意）に対して，$n\times n$ 行列 $V_n=(v(t_j,t_k))$ が正定値行列のとき，$\vec{m}=(m_{t_1},\cdots,m_{t_n})\in\boldsymbol{R}^n$ とおき，函数 $g_{(t_1,\cdots,t_n)}(\vec{x})$ を定義すると，上述と同じ方法で（$\boldsymbol{R}^T,\mathcal{F}$）上の Gauss 測度 μ が一意に構成される．ここで $\xi(t,\omega)=\omega_t$，$\omega=\prod\omega_t\in\boldsymbol{R}^T$ とおくと，$\xi(t)$ は平均 m_t，共分散函数 $v(s,t)$ をもつ．

可測空間（$\Omega,\mathcal{F}$）において確率測度の対 μ,ν に対して第 3 章で導入した相対エントロピー

$$S(\mu|\nu)=\sup_{\tilde{A}}\sum_{A\in\tilde{A}}\mu(A)\log\frac{\mu(A)}{\nu(A)}$$

（$\tilde{A}$ は有限可測分割）は $\mu\ll\nu$ のときは $d\mu/d\nu$ によって積分表示され $\mu\not\ll\nu$ のときは $S(\mu|\nu)=\infty$ となることが Gelfand-Kolmogorov-Yaglom の定理として知られている（第 3 章，定理 3.1 参照）．

ここで μ,ν が Gauss 測度の対であるとき（可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})\equiv(\boldsymbol{R}^T,\mathcal{F})$ の場合）を考えると，この場合は極めて明確な結論が得られている．

〈定理 7.11〉 可測空間（$\Omega, \mathcal{F}$）上の2つのGauss測度 μ, ν は，常に $\mu\approx\nu$（互いに絶対連続）か $\mu\perp\nu$（互いに特異）であり，$\mu\approx\nu$ は $S(\mu|\nu)<\infty$ により，$\mu\perp\nu$ は $S(\mu|\nu)=\infty$ により特徴付けられる．

7.3 Hilbert 空間上の Gauss 測度

この節では $\mathcal{H}=\{x, y, z, \cdots\}$ を実可分 Hilbert 空間とする．$\mathcal{H}$ の Borel 集合体を $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で表す．この $\mathcal{B}$ は $\mathcal{H}$ のノルムに関する閉集合（有界閉球でよい）全体によって生成される σ-集合体である．これはまた弱位相に関して閉（弱閉という）な集合全体によって生成される σ-集合体とも一致する．可測空間（$\mathcal{H}, \mathcal{B}$）の有限正値完全加法的集合函数 μ を $\mathcal{H}$ 上の有限 Borel 測度といい，とくに $\mu(\mathcal{H})=1$ のとき μ を単に $\mathcal{H}$ 上の確率測度という．この様な測度で自明でないものが十分多数（数学的に）存在することは容易にいえる．たとえば，（i）$\mathcal{H}$ の任意の有界閉球は弱コンパクトであり，これを台にもつ確率測度，（ii）$\mathcal{H}$ の有限次元部分空間はそれと同次元な Euclid 空間と合同（同一視可という意味）であり，その Euclid 空間上に確率分布を対応させ，それを $\mathcal{H}$ 上に拡大した測度などがある．とくに，このような測度のうちで Gauss 測度が重要であり，それは $\mathcal{H}$ 上の正のトレースクラス作用素に丁度対応することがわかる（<定理7.15>）．

この節では，Hilbert 空間上の Gauss 測度の特徴化とその様々な性質について論じる．まず，Gauss 測度の定義から始める．

［定義 7.1］ $\mathcal{H}$ 上の確率測度 μ が次の条件を満たすとする：各 $x\in\mathcal{H}$ に対して，汎函数 $f_x(y)\equiv\langle x, y\rangle$ が Gauss 分布をもつ．すなわち $\mu\circ f_x^{-1}\ll$Lebesgue 測度，かつ実数 m_x, σ_x が存在して

$$\frac{\mu(f_x^{-1}(dt))}{dt}\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{(t-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right). \tag{7.8}$$

このとき μ を $\mathcal{H}$ 上の **Gauss 測度**という．ここで m_x, σ_x は

$$m_x\equiv\int_{\mathcal{H}}\langle x, y\rangle d\mu(y),\quad \sigma_x^2\equiv\int_{\mathcal{H}}(\langle x, y\rangle-m_x)^2 d\mu(y). \tag{7.9}$$

この定義と 7.1 節の結果，たとえば〈定理 7.1〉から

1° $\mathcal{H}$ 上の確率測度 μ が Gauss 測度であるための必要十分条件は $\mathcal{H}$ 上の汎函数全体 $\mathcal{H}^*=\{f_x\,;\,x\in\mathcal{H}\}$ を確率空間 $(\mathcal{H},\mathcal{B},\mu)$ 上の定数値確率変数族と見做したとき，$\mathcal{H}^*$ が Gauss 系であることである．($\mathcal{H}$ は実 Hilbert 空間であるから $x=f_x$ によって $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H}^*$ と同一視できる．したがって，$\mathcal{H}$ 自身を Gauss 空間と考えてよい.)

この命題の必要性は定義から，十分性は $\mathcal{H}$ 自身が線形空間であることから明白である．Gauss 測度の定義を冒頭に述べたが，ここで，$\mathcal{H}$ 上の確率測度の一般論を先に論じよう．

2° μ を $\mathcal{H}$ の 1 つの確率測度とする．これに対して

$$\langle x, R_\mu y\rangle=\int_{\mathcal{H}}\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle d\mu(z) \tag{7.10}$$

とおくとき，この値がすべての $x, y\in\mathcal{H}$ で存在するならば R_μ は有界，自己共役な正作用素である．

証明 R_μ が $\mathcal{H}$ 上で線形作用素であることは明らかである．さらに (7.10) の右辺は

$$\int_{\mathcal{H}}\langle y, z\rangle\langle z, x\rangle d\mu(z)=\langle y, R_\mu x\rangle$$

に等しく，したがって

$$\langle x, R_\mu y\rangle=\langle y, R_\mu x\rangle=\langle R_\mu x, y\rangle,\ \forall\, x, y\in\mathcal{H}.$$

すなわち，R_μ は自己共役である．この R_μ は $\mathrm{dom}R_\mu$(R_μ の定義域)$=\mathcal{H}$ であるから R_μ の有界性は次のようにしていえる．$x_n\to x$(弱)$\Rightarrow\langle R_\mu x_n, y\rangle=\langle x_n, R_\mu y\rangle\to\langle x, R_\mu y\rangle=\langle R_\mu x, y\rangle$ $(\forall\, y\in\mathcal{H})\Rightarrow R_\mu x_n\to R_\mu x$(弱)．もし R_μ が非有界ならば $\{y_n\}\subset\mathcal{H}, \|y_n\|\leqq 1$ が存在して $\|R_\mu y_n\|\geqq M_n\to\infty\,(n\to\infty)$．ところが，$\mathcal{H}$ の単位閉球は弱点列コンパクトであるから部分列 $\{x_k\}=\{y_{n_k}\}\subset\{y_n\}$ と $x\in\mathcal{H}$ が存在して $x_k\to x$ (弱)．ゆえに $R_\mu x_k\to R_\mu x$, (弱)，これは $\|R_\mu x_k\|=\|R_\mu y_{n_k}\|\geqq M_{n_k}\to\infty$ に矛盾．したがって $\|R_\mu x_k\|$ は有界．R_μ が正の作用素であることは自明． ▌

3° **Dirac 測度**：$e\in\mathcal{H}$ を固定し，各 $B\in\mathcal{B}$ に対して

$$\delta_e(B)=1 \ (e\in B), \ =0 \ (e\notin B)$$

である δ_e を Dirac 測度という．これは $\mathcal{H}$ 上の確率測度であり，2° で $\mu=\delta_e$ とおくと，$R_{\delta_e}=e\otimes e$ である．

証明 前半は明らか，後半は

$$\langle x, e\otimes ey\rangle=\langle x, \langle e, y\rangle e\rangle=\langle x, e\rangle\langle e, y\rangle$$

$$=\int_{\mathcal{H}}\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle d\delta_e(z)=\langle x, R_{\delta_e}y\rangle. \ \blacksquare$$

4° $\mathcal{H}$ の n 次元部分空間 $\mathcal{H}_n$ は $\boldsymbol{R}^n$ に同一視できる．この合同性を与える対応を $i_n: \mathcal{H}_n\to\boldsymbol{R}^n$ とする．m_n を $\boldsymbol{R}^n$ 上の（通常の Borel）確率測度とするとき

$$\mu(B)\equiv m_n(i_n(B\cap\mathcal{H}_n)), \quad B\in\mathcal{B}$$

は $\mathcal{H}$ 上の確率測度である．

5° $e\in\mathcal{H}, \|e\|=1$, に対して一次元部分空間を $\mathcal{H}_1=\{te \,;\, t\in R\}$ とする．合同対応 $i_1 \,;\, \mathcal{H}_1\to\boldsymbol{R}$ を $i_1(te)=t$ で定める．このとき 4° の μ を μ_e とおけば(i. e.，$\mu_e(B)=m_1(i_1(B\cap\mathcal{H}_1)), \forall B\in\mathcal{B}$),

$$R_{\mu_e}=\left(\int_{\boldsymbol{R}}t^2dm_1(t)\right)\cdot e\otimes e.$$

証明 これは次の計算式からいえる：

$$\langle x, R_{\mu_e}y\rangle=\int_{\mathcal{H}}\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle d\mu_e(z)=\int_{\mathcal{H}_1}\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle d\mu_e(z)$$

$$=\int_{\mathcal{H}}\langle x, (e\otimes e)z\rangle\langle y, (e\otimes e)z\rangle d\mu_e(z)$$

$$=\langle x, e\rangle\langle y, e\rangle\int_{\mathcal{H}}\langle e, z\rangle^2 d\mu_e(z)$$

$$=\langle x, e\rangle\langle y, e\rangle\int_{\boldsymbol{R}}t^2dm_1(t)$$

$$=\int_{\boldsymbol{R}}t^2dm_1(t)\langle x, (e\otimes e)y\rangle. \ \blacksquare$$

一般に $\mathcal{H}$ 上の確率測度 μ で条件

$$\int_{\mathcal{H}}\|x\|^2d\mu(x)<\infty \tag{7.11}$$

を満たすものを考えよう．このようなμは十分多く存在する．たとえば $\mu=\delta_e$ や $\int_R t^2 dm_1(t)<\infty$ である m_1 によって定義される μ_e(cf. 5°)，$\mathcal{H}$ の有界閉球を台にもつ確率測度など．

6° $\mathcal{H}$ 上の確率測度μが（7.11）を満たすならばベクトル $m_\mu\in\mathcal{H}$ が一意に存在して

$$\langle x, m_\mu\rangle=\int_{\mathcal{H}}\langle x, y\rangle d\mu(y),\quad x\in\mathcal{H}.$$

さらに（7.11）より弱い条件 $\int_{\mathcal{H}}\|x\|d\mu(x)<\infty$ を満たすμに対しては，強積分（Bochner 積分）が存在し

$$m_\mu=\int_{\mathcal{H}} x d\mu(x) \tag{7.12}$$

と表示することができる．この $m_\mu\in\mathcal{H}$ を μ の**平均ベクトル**という．

〈定理 7.12〉 $\mathcal{H}$ 上の確率測度 μ に対して，

μが条件（7.11）を満たす $\Longleftrightarrow$ $R_\mu\in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$．このとき

$$\mathrm{tr}(R_\mu)=\int_{\mathcal{H}}\|x\|^2 d\mu(x) \tag{7.13}$$

証明 ($\Rightarrow$)：$\{e_n\}\subset\mathcal{H}$ を CONS とするとき

$$\sum_{k=1}^{n}\langle e_k, R_\mu e_k\rangle=\int_{\mathcal{H}}\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2 d\mu(x)\uparrow\int_{\mathcal{H}}\|x\|^2 d\mu(x).$$

ゆえに，

$$\mathrm{tr}(R_\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle e_n, R_\mu e_n\rangle=\int_{\mathcal{H}}\|x\|^2 d\mu(x)<\infty. \tag{7.14}$$

($\Leftarrow$) は CONS $\{e_n\}$ と $\|x\|^2=\sum\langle x, e_n\rangle^2$ を用い同様にして示せる．等式（7.13）は（7.14）からすでに自明．▌

註 自己共役作用素 $R\in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ を S-作用素とよぶ場合もあるが本書ではこの名称は用いない．

$\mathcal{H}$ 上の確率測度μを与えたとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して $r_\varepsilon>0$ が存在して

$\mu(B(r_\varepsilon))\geqq 1-\varepsilon$ を満たす．ここで $B(r_\varepsilon)=\{x\in\mathcal{H}\,;\,\|x\|\leqq r_\varepsilon\}$（半径 r_ε の閉球）．したがって

7° 作用素 $R_\varepsilon\in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ が存在して

$$\langle x, R_\varepsilon y\rangle=\int_{B(r_\varepsilon)}\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle d\mu(z),\quad x, y\in\mathcal{H}.$$

これは測度 μ の定義域を $\{E\cap B(r_\varepsilon)\,;\,E\in\mathcal{B}\}$ に制限して考えれば〈定理 7.12〉と同様に示せる．このとき次の命題 8°, 9° は 7° から容易である：

8° $\varepsilon_1\geqq\varepsilon_2>0\ \Rightarrow\ R_{\varepsilon_1}\leqq R_{\varepsilon_2}$.

9° 式 (7.10) が任意の $x, y\in\mathcal{H}$ で存在すれば 7° の作用素 $R_\varepsilon(\varepsilon>0)$ は 2° で与えられた作用素 R に強収束する：

$$\|(R-R_\varepsilon)x\|\to 0\,(\varepsilon\downarrow 0),\quad \forall x\in\mathcal{H}.$$

10° 条件 (7.11) が満たされれば

$$\mathrm{tr}(R-R_\varepsilon)\to 0\quad(\varepsilon\to 0),$$

つまり R_ε は R にトレース・ノルムで収束する．

これは任意の CONS $\{e_n\}$ に対して

$$\mathrm{tr}(R-R_\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle e_n, (R-R_\varepsilon)e_n\rangle\to 0,\quad(\varepsilon\to 0)$$

と 8° からいえる．

第6章，6.1 節では正の定符号函数が実数直線 $\boldsymbol{R}$ 上で定義された．ここではそれを Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上で定義する．$\mathcal{H}$ 上の複素数値函数 φ が**正の定符号**であるとは，すべての有限列 $\{x_j\}\subset\mathcal{H}$ と有限複素数列 $\{\alpha_i\}$ に対して

$$\sum\alpha_i\alpha_k\varphi(x_j-x_k)\geqq 0 \tag{7.16}$$

が成立するときをいう．このとき次のことは自明である：

11° 任意の確率測度 μ に対して

$$\varphi_\mu(x)=\int_{\mathcal{H}}e^{i\langle x, y\rangle}d\mu(y),\quad x\in\mathcal{H} \tag{7.17}$$

は正の定符号函数で弱（したがって強）位相に関して連続であり，$\varphi_\mu(0)=1$ を満たす．この函数 φ_μ を μ の**特性函数**という．

一方，与えられたφが (7.17) によって表示されるためには $\mathcal{H}=\boldsymbol{R}$ の場合のようにφの正符号性と連続（または可測）性の条件のみで十分かどうか，つまり命題 11° の逆である Bochner の表現定理が Hilbert 空間においてもいえるかどうかが問題となる．これは Minlos や Prohorov などによって解決された [K 9, P 6, S 11]．さらに，それを用いて懸案の Gauss 測度がトレースクラスの作用素によって一意に特徴付けられることが示される．ここでは Prohorov の定式化で述べよう．以下の定理の証明は Hilbert空間上の作用素に関する諸性質を駆使して行うことが可能であるが，様々な準備を要するので，本書では割愛する．

〈定理 7.13〉 $\mathcal{H}$ 上の函数φが，確率測度μの特性函数であるための必要十分条件は，次の（1），（2）が成立することである：

（1） φは正の定符号で $\varphi(0)=1$.

（2） 任意の $\varepsilon>0$ に対して，作用素 $R_\varepsilon\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ が存在して

$$1-\mathrm{Re}\varphi(x)\leqq\langle x, R_\varepsilon x\rangle+\varepsilon, \quad \forall x\in\mathcal{H}$$

(この定理における R_ε は命題 7° で導入された作用素である．必要性はその命題から容易である.)

〈定理 7.14〉 $\mathcal{H}$ 上の確率測度 μ が Gauss 測度ならば μ は条件 (7.11) を満たし，μに対応する作用素は $R_\mu\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ である．さらにμの特性函数 φ_μ は

$$\varphi_\mu(x)=\exp\left(i\langle x, m_\mu\rangle-\frac{\langle x, R_\mu x\rangle}{2}\right), \quad x\in\mathcal{H} \tag{7.18}$$

となる.

〈定理 7.15〉 $m\in\mathcal{H}$ と $R\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ に対して

$$\varphi(x)=\exp\left(i\langle x, m\rangle-\frac{\langle x, Rx\rangle}{2}\right), \quad x\in\mathcal{H} \tag{7.19}$$

はある Gauss 測度μ の特性函数 φ_μ である.

式 (7.19) で表される函数を以下 $\varphi=\varphi_{m,R}$ と書く.

〈**定理 7.15**〉 対応 "Gauss 測度 $\mu\longleftrightarrow(m, R)=(m_\mu, R_\mu)$, $m_\mu\in\mathcal{H}$, $R_\mu\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$", は関係式 (7.18) によって1対1である.

$m_1, m_2\in\mathcal{H}$ と $R_1, R_2\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ に対して式 (7.19) によって定義される函数を $\varphi_1\equiv\varphi_{m_1R_1}, \varphi_2\equiv\varphi_{m_2R_2}$ としたとき, 上の定理は

$$\varphi_1=\varphi_2 \iff m_1=m_2, R_1=R_2$$

ということを表している. この証明は容易である：$\varphi_1=\varphi_2\iff i\langle x, m_1-m_2\rangle=\langle x, (R_2-R_1)x\rangle/2, \forall x\in\mathcal{H}\iff m_1=m_2, R_1=R_2$.

以上の定理によって $\mathcal{H}$ 上の Gauss 測度を考えるということはベクトル $m\in\mathcal{H}$ と作用素 $R\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ 定めて, 特性函数 (7.19) を構成することと同値であることがわかった. これで Hilbert 空間上の Gauss 測度に関する最も基本的な定理が述べられたのである. また, 前節の〈定理 7.11〉によって $\mathcal{H}$ 上の Gauss 測度の任意の対 μ, ν をとれば, 必ず $\mu\approx\nu$ か $\mu\perp\nu$ のいずれかの場合になるが, これらについてさらに, 詳細な理論が展開されている. それらの説明も興味あることであるがここでは割愛する. Rao-Varadarajan [R 1] や Kuo [K 9] などが参考となる. 最近 Baker [B 1, 2, 3], Yanagi [Y 1] 等が Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ を各々入力, 出力源とし, 情報源の測度 μ_1 を Gauss 測度にとりチャンネルの構成を行っている.

7.4 信号過程の生成する von Neumann 代数

2次のモーメントを有する確率過程は, エネルギー有限な信号過程ともいえる. これは自然な方法で一つの Hilbert 空間を生成する. 一方, 信号の表現法でいえば有界振幅信号の全体は $L^\infty(\boldsymbol{R})$ と表示されることは第6章で説明した通りであるが, この信号がランダム性をもつ場合も重要であり, 数学的にも多くの問題を提供してくれる. 信号は $t\in\boldsymbol{R}$ や $n\in\boldsymbol{Z}$ をパラメータにもち, あ

る確率空間 Ω 上の確率変数を値とする函数 $\xi(t)=\xi(t,\cdot)$ で本質的に有界であるような函数である．この節ではとくにパラメータが離散的でメッセージ空間 $A^{\boldsymbol{Z}}$ 上のメッセージ（第5章参照）とか，それらの結合した事象を信号値にもつようなランダム信号過程からなる集団を時刻の推移に組み合わせ，接合させることによって，全く新たな数学構造をもつ函数系を導入する．

7.4.1 Banach* 代数 $l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$

メッセージ空間として $A^{\boldsymbol{Z}}$ を与え，各メッセージ $M\in\mathcal{M}(A^{\boldsymbol{Z}})$ に対して定義函数 1_M を対応させると $\{1_M\ ;\ M\in\mathcal{M}(A^{\boldsymbol{Z}})\}$ は $A^{\boldsymbol{Z}}$ 上の連続函数空間 $C(A^{\boldsymbol{Z}})$ を sup-ノルム $\|\cdot\|$ に関して生成する．函数解析の手法を用いるため各メッセージ値函数を拡大して，時系列として $\xi:\boldsymbol{Z}\to C(A^{\boldsymbol{Z}})$ である函数，つまり $\xi(n)=\xi(n,\cdot)\in C(A^{\boldsymbol{Z}}), n\in\boldsymbol{Z}$, を考えよう．更に次のような $\xi(n)$ のなす空間を考える：

$$l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})=\left\{\xi(\cdot,\cdot)\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\|\xi(n,\cdot)\|<+\infty\right\}.$$

これは Banach 空間である：$\xi,\eta\in l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ と $\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}$ に対して

$$(\alpha\xi+\beta\eta)(n,x)=\alpha\xi(n,x)+\beta\eta(n,x),\quad \forall n\in\boldsymbol{Z}, x\in A^{\boldsymbol{Z}}$$

により線形性が入り，ノルム

$$\|\xi\|_1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|\xi(n,\cdot)\|$$

に関して完備，つまり Banach 空間となる．この空間はテンソル積表示により

$$l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})=l^1(\boldsymbol{Z})\otimes_\gamma C(A^{\boldsymbol{Z}})$$

と表される．このテンソル積は Schatten [S 2] の意味における γ-ノルムによるものである $\left(\text{i.e., } \|\xi\|_\gamma\equiv\inf\left\{\sum_{k=1}^{N}\|f_k(\cdot)\|_1\|g_k(\cdot)\|\ ;\ \xi=\sum_{k=1}^{N}f_k\odot g_k\right\}\right.$ により線形空間 $l^1(\boldsymbol{Z})\odot C(A^{\boldsymbol{Z}})$ を完備化したもの$\Big)$．したがって $l^0(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ を $\|\xi(n,\cdot)\|$ が有限個の $n\in\boldsymbol{Z}$ を除いて 0 である ξ の全体とすると，これは $l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ の稠密な線形部分空間である．ここで離散的な場合の**群代数** (group-algebra) $l^1(\boldsymbol{Z})$ の対合 $\xi\to\xi^*$ や積 $\xi*\eta$ をこの $l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ に導入

し接合積の理論を適用する：すべての $k\in\boldsymbol{Z}, x\in A^{\boldsymbol{Z}}$ に対して

(CP 1)　$$\xi^*(k,x)\equiv\overline{\xi(-k,T_kx)},$$

(CP 2)　$$\xi*\eta(k,x)\equiv\sum_{j=-\infty}^{\infty}\xi(k-j,T_jx)\eta(j,x).$$

ここで T は $A^{\boldsymbol{Z}}$ 上のシフト変換で

$$T_0\equiv I,\quad T_n\equiv T^n,\quad T_{-n}\equiv(T^{-1})^n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$$

とする．このとき

$$\|\xi^*\|_1=\|\xi\|_1 \text{ かつ } \|\xi*\eta\|_1\leqq\|\xi\|_1\cdot\|\eta\|_1.$$

この後者は2重級数の通常の計算法ですぐいえる．さらに

$$\xi^{**}(\equiv(\xi^*)^*)=\xi,\quad(\alpha\xi+\beta\eta)^*=\bar{\alpha}\xi^*+\bar{\beta}\eta^* \tag{7.20}$$

$$\xi*(\eta+\zeta)=\xi*\eta+\xi*\zeta,\quad(\xi+\eta)*\zeta=\xi*\zeta+\eta*\zeta \tag{7.21}$$

$$\xi*(\eta*\zeta)=(\xi*\eta)*\zeta,\quad(\xi*\eta)^*=\eta^**\xi^*. \tag{7.22}$$

等式（7.26）を示そう．他は明白である．

$$\begin{aligned}((\xi*\eta)*\zeta)(i,x)&=\sum_j(\xi*\eta)(i-j,T_jx)\zeta(j,x)\\&=\sum_j\sum_k\xi(i-j-k,T_{j+k}x)\eta(k,T_jx)\zeta(j,x)\\&=\sum_j\sum_m\xi(i-m,T_mx)\eta(m-j,T_jx)\zeta(j,x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\xi*(\eta*\zeta))(i,x)&=\sum\xi(i-j,T_jx)\eta*\xi(j,x)\\&=\sum_j\sum_k\xi(i-j,T_jx)\eta(j-k,T_kx)\zeta(k,x).\end{aligned}$$

これ等は絶対収束しているから j,k を入れ換えてもよい．したがって目的の等式を得る．(7.22) の後半の等式の証明：

$$(\xi*\eta)^*(i,x)=\overline{\xi*\eta(-i,T_ix)}=\sum_j\overline{\xi(-i-j,T_{i+j}x)\eta(j,T_ix)}$$

$$\begin{aligned}\eta^**\xi^*(i,x)&=\sum_j\eta^*(i-j,T_jx)\xi^*(j,x)\\&=\sum_j\overline{\eta(j-i,T_ix)}\,\overline{\xi(-j,T_jx)}\\&=\sum_k\overline{\eta(k,T_ix)}\,\overline{\xi(-i-k,T_{i+k}x)}.\end{aligned}$$

よって等式（7.22）が得られた．一方

$$\delta_0(k,x)\equiv\delta^0(k),\quad\forall k\in\boldsymbol{Z},\quad\forall x\in A^{\boldsymbol{Z}}. \tag{7.23}$$

ここで $\delta^0(k)=1(k=0), =0(k\neq 0)$ とすると $\delta_0(\cdot,\cdot)\in l^0(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ であり

$$\delta_0{}^*=\delta_0,\quad \delta_0*\xi=\xi*\delta_0=\xi,\quad \forall\xi\in l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}).$$

こうして次の定理を得る.

〈定理 7.16〉 $l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ は単位元 δ_0 をもつ Banach $*$代数である.

Banach* 代数 $l^1(\boldsymbol{Z}, A)^{\boldsymbol{Z}}$ を $A^{\boldsymbol{Z}}$ の $\boldsymbol{Z}$ による l^1-**接合積**という. この接合積に関して次の同等性がいえる：$l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ が可換 (i.e., $\xi*\eta=\eta*\xi$, $\forall\xi,\eta\in l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$) $\Longleftrightarrow l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ が 1 次元(すなわち, スカラー体) $\Longleftrightarrow$ A が 1 点集合.

接合積の手法は von Neumann が初めに論じたが, それを作用素代数上に明解に展開したのは Nakamura–Takeda [N 2] である. さらに一般化され, 位相群と作用素代数の接合積の議論に発展し, 多くの有用な (純粋数学上の) 結果が得られている. 関連する文献として [D 10, N 1, V 2] などがある.

7.4.2 ランダム信号過程のなす Hilbert 空間 $l^2(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$

この項では, 情報源の確率測度でシフト変換 T に関して不変な μ を固定する. 第 6 章の記法を用いれば $\mu\in P_T(A^{\boldsymbol{Z}})$ を定め, 定常情報源 $[A^{\boldsymbol{Z}}, \mu]$ (力学系 $(A^{\boldsymbol{Z}}, \mathcal{F}_A, \mu, T)$ のこと) を定める. ここで 2 次モーメントを有する離散的なランダム信号過程 $\xi(n,\cdot)$ のなす Hilbert 空間 $l^2(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ を考える. まずこれを導く前に必要な準備を行う.

$$\tilde{\mu}(\xi)\equiv\int_{A^{\boldsymbol{Z}}}\xi(0,x)d\mu(x),\quad \xi\in l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}).$$

これは $l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ 上の有界線形作用素である. すなわち

$$\tilde{\mu}(\delta_0)=\mu(A^{\boldsymbol{Z}})=1 \text{ であり}$$

$$\tilde{\mu}(\xi^*)=\overline{\tilde{\mu}(\xi)},\quad |\tilde{\mu}(\xi)|\leqq\|\xi\|_1. \tag{7.24}$$

したがって, 汎函数として $\|\tilde{\mu}\|=1$ であり,

$$\tilde{\mu}(\xi*\eta)=\tilde{\mu}(\eta*\xi) \tag{7.25}$$

$$\langle\xi|\eta\rangle\equiv\mu(\xi^**\eta)=\sum_n\int\xi(n,x)\eta(n,x)d\mu(x) \tag{7.26}$$

実際 (7.25) は

$$\tilde{\mu}(\xi*\eta)=\int_{A^{\boldsymbol{Z}}}\xi*\eta(0,x)d\mu(x)=\int_{A^{\boldsymbol{Z}}}\sum_n\xi(-n,T_nx)\eta(n,x)d\mu(x)$$

$$=\int\sum\xi(-n,x)\eta(n,T_{-n}x)d\mu(x)$$

$$=\int\sum\eta(-n,T_nx)\xi(n,x)d\mu(x)$$

$$=\tilde{\mu}(\eta*\xi).$$

(7.26) は可換性 $\int\sum=\sum\int$ を用い，(7.25) と同様の計算でいえる．(7.26) による $\langle\,|\,\rangle$ は $l^1(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}})$ 上の内積を与え，さらに

$$\|\xi\|_2=\sqrt{\langle\xi|\xi\rangle}=\left(\sum_n\int|\xi(n,x)|^2d\mu(x)\right)^{1/2}$$

はノルムの条件を満たし，これによって $l^1(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}})$ を完備化したものを $l^2(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ で表すと

〈定理 7.17〉 (1)　$l^2(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ はテンソル積 Hilbert 空間である，すなわち，

$$l^2(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)=l^2(\boldsymbol{Z})\otimes L^2(A^{\boldsymbol{Z}},\mu).$$

(2)　$l^1(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}})$ は測度 μ を法とする線形空間として (i.e., $\xi=\eta\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\xi(n,\cdot)=\eta(n,\cdot)\,\mu$-a.e., $\forall n\in\boldsymbol{Z}$) $l^2(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ の部分空間である．

(3)　$\langle\xi^*|\eta^*\rangle=\langle\eta|\xi\rangle$,　$\forall\xi,\eta\in l^2(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$.

(4)　$\|\xi*\eta\|_2\leqq\|\xi\|_1\cdot\|\eta\|_2$,　$\forall\xi\in l^1(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}})$,　$\forall\eta\in l^2(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$.

証明　(1)〜(3) は容易である．(4) を証明する．

$$\|\xi*\eta\|_2{}^2=\langle\xi*\eta,\xi*\eta\rangle=\int\sum_n|\xi*\eta(n,x)|^2d\mu(x)$$

$$=\int\sum_j|\sum_k\xi(j-k,T_kx)\eta(k,x)|^2d\mu(x)$$

$$=\int\sum_j\sum_{m,n}(\xi(j-m,T_mx)\eta(m,x)\overline{\xi(j-n,T_nx)\eta(n,x))}d\mu(x)$$

$$\leqq\int\sum_j\sum_{m,n}\|\xi(j-m,\cdot)\|\cdot\|\xi(j-n,\cdot)\||\eta(m,x)\eta(n,x)|d\mu(x)$$

$$\leqq \sum_j \sum_{s,t} \|\xi(s,\cdot)\|\cdot\|\xi(t,\cdot)\|\cdot\int|\eta(j-s,x)|\cdot|\eta(j-t,x)|d\mu(x)$$

$$\leqq \|\xi\|_1{}^2\cdot\|\eta\|_2{}^2 \quad \blacksquare$$

一つの要素 $\xi\in l^2(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ が**有界**であるとは $\xi*\eta$ が $l^2(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ に存在し,

$$\|\xi*\eta\|_2\leqq C\cdot\|\eta\|_2, \quad \forall\eta\in l^2(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$$

のときをいう．ただし，C は正の定数．有界な $l^2(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ の元の全体を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ で表すと次の命題が容易にいえる．

1° $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ は単位元 δ_0 をもつ $*$ 代数である．

2° $l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ は μ を法とする $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ の $*$ 部分代数である．

各 $\xi\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ に対して

$$L_\xi\eta=\xi*\eta, \quad \eta\in l^2(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$$

とおくと L_ξ は $l^2(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ 上の有界作用素となる．

3° $\mathcal{L}(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)\equiv\{L_\xi\,;\,\xi\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)\}$ は有限型 von Neumann 代数である（付章 2.9 項参照）．

証明 $\mathcal{L}(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ の弱閉性は直接計算でいえ，有限型のことは

$$\tau(L_\xi)\equiv\tilde{\mu}(\xi*\delta_0)$$

とおくと $\tau(\cdot)$ は $\mathcal{L}(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}}, \mu)$ 上の忠実なトレース状態になることからわかる（(7.24), (7.25) など参照）．▍

4° 式 (7.23) によって定義された $\delta_0(k,x)$ を用い，$(A^{\boldsymbol{Z}}, \mathcal{F}_A, \mu)$ 上の任意の可測函数 f に対して

$$f(n,x)=\delta_0(n,x)f(x), \quad n\in\boldsymbol{Z}, \quad x\in A^{\boldsymbol{Z}} \tag{7.27}$$

とおくと

$$f*g(n,x)=\delta_0(n,x)f(x)g(x)=g*f(n,x). \tag{7.28}$$

実際，$f*g(n,x)=\sum_m f(n-m, T_m x)g(m,x)=f(T_n x)g(n,x)$

$$=0 \ (n\neq 0), \quad =f(x)g(x) \ (n=0)$$

$$=\delta_0(n,x)f(x)g(x).$$

この 4° によって，f と $f(n,\cdot)$ を同一視することができ，$L^2(A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ は Hilbert 空間 $l^2(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ の閉部分空間と考えられ，〈定理 7.17〉の（1）の式は同一の部分空間 $L^2(A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ の可算（$\boldsymbol{Z}$に沿っての）直和として $l^2(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ が表されることを意味し，また，L^∞ に関して次のことがわかる．

5° $L^\infty(A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ の＊部分代数である．

このことを用いて，次の定理を示めそう：

〈定理 7.18〉 $[A^{\boldsymbol{Z}},\mu]$ がエルゴード情報源であるための必要十分条件は $\mathcal{L}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ が II_1-ファクターであることである．

証明 必要性：$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ は有限型 von Neumann 代数であるから，まず $\mathcal{L}$ がファクターであることと，離散的でないことを示せばよい．もし $\mathcal{L}$ がファクターでないとすると，$\mathcal{L}$ の中心はスカラー以外の作用素 S を含む．したがって，ある $\xi\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ と $0\neq k_0\in\boldsymbol{Z}$ が存在して $\xi(k_0,\cdot)\neq 0$ かつ $S=L_\xi$．いま，任意の固定した $j\in Z$ に対して $\eta\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ を $\eta(k,x)=\eta(j,x)(k=j),=0(k\neq j)$ と選ぶ．このとき

$$\left.\begin{aligned}\xi*\eta(n,x)&=\sum_k\xi(n-k,T_kx)\eta(k,x)=\xi(n-j,T_jx)\eta(j,x)\\ \eta*\xi(n,x)&=\sum_k\eta(n-k,T_kx)\xi(k,x)=\eta(j,T_{n-j}x)\xi(n-j,x)\end{aligned}\right\}\quad(7.29)$$

と $\xi*\eta=\eta*\xi$ から

$$\xi(n-j,T_jx)\eta(j,x)=\eta(j,T_{n-j}x)\xi(n-j,x).\qquad(7.30)$$

また任意の固定した $x\in A^{\boldsymbol{Z}}$ に対して $\eta(j,\cdot)(\in C(A^{\boldsymbol{Z}}))$ を $\eta(j,x)=\eta(j,T_{n-j}x)$ ととれるから $\xi(n-j,T_jx)=\xi(n-j,x)$．$n\in\boldsymbol{Z}$ は任意であったが，特に $n=j+k_0$ とする．このとき $\xi(k_0,x)\neq 0$（k_0 は上述の $k_0\in\boldsymbol{Z}$）である $x\in A^{\boldsymbol{Z}}$ に対して常に $\eta(j,x)=\eta(j,T_{n-j}x)$（$\eta(j,\cdot)$ は任意）が等式(7.30) からいえる．これは矛盾である．また $\xi(0,Tx)=\xi(0,x)$ は直ぐいえ，μ のエルゴード性を用いて目標に達する．次に $\mathcal{L}$ がある $n>0$ で I_n 型ファクターだとすると，$L^\infty(A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ は有限次元となる．これはμのエルゴード性に矛盾する．

十分性：$\mathcal{L}$ がファクターとし，μ がエルコード的でないとすると可測集合 $M\in\mathcal{F}_A$ が存在して $T^{-1}M=M$, $0<\mu(M)<1$. $f\equiv 1_M$ とおき (7.27) で $f(n,x)$ を与え，さらに，任意の $\xi\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ に対して，二つの等式 (7.29) を得るが，$f(x)=f(Tx)$ であることから $\xi*f=f*\xi$ となり，$\mathcal{L}$ がファクターだから $L_f=\alpha I$（スカラー作用素）であり，$f(x)=\alpha$ μ–a.e.，よって，$\mu(M)=1$ となり矛盾する．▌

すべての $f\in L^\infty\equiv L^\infty(A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ は (7.27) の記号を用いて，$\boldsymbol{B}\equiv\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ の要素と考えることができた．しかも (7.34) によって L^∞ は $\boldsymbol{B}$ の部分代数であることがわかる．さらに

$$\mathcal{L}^\infty\equiv\mathcal{L}^\infty(A^{\boldsymbol{Z}},\mu)\equiv\{L_f\,;\,f\in L^\infty(A^{\boldsymbol{Z}},\mu)\}$$

とおく．以上の記号によって

〈定理 7.19〉 $\mathcal{L}^\infty=\mathcal{L}^\infty(A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ は von Neumann 代数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ の部分代数であり，$L^\infty,\mathcal{L}^\infty,\mathcal{L}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ に関して，次の条件が成立する．

（1） $\mathcal{L}^\infty$ は $\mathcal{L}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ において極大可換な von Neumann 部分代数である．

（2） L^∞ は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)$ において極大可換な＊部分代数である．

（3） $\mathcal{L}^\infty$ に関する条件付期待値 $E_{\tilde{\mu}}(\cdot|\mathcal{L}^\infty):\mathcal{L}(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}},\mu)\to\mathcal{L}^\infty$ は唯ひとつ存在する．

この定理は純粋な函数解析的な結果で，さらに種々に発展させることができる．情報理論としての応用も符号化などに適用可能である．

以上でメッセージ空間 $A^{\boldsymbol{Z}}$ 上での信号過程として，一般性のある手法で von Neumann 代数の構成を行ったが，一般の力学系 $\{X,\mathcal{F}_X,\mu,G\}$（$X$ はコンパクト Hausdorff 空間，G は確率測度 μ を不変にする位相同型または可逆可測変換のなす群）に対しても，この節で論じたことは，すべて自動的な記号の変更のみでいえる． また，$l^1(\boldsymbol{Z},A^{\boldsymbol{Z}})$ を構成した際 $C(A^{\boldsymbol{Z}})$ 値な $\boldsymbol{Z}$ 上の函数によって行ったが，力学系の X が確率測度空間のときは $C(A^{\boldsymbol{Z}})$ の代わりに

$L^\infty(X,\mu)$ をとり，ノルム $\|\cdot\|$ は ess·sup のノルムを採用する．したがって，$l^1(\boldsymbol{Z}, A^{\boldsymbol{Z}})$ は測度 μ に従属するから l_μ^2 などの場合のように $l_\mu^1(\boldsymbol{Z}, X, G)$ とか $l^1(\boldsymbol{Z}, X, G, \mu)$ で表すことになる．なお，一般の場合にも本節の内容はすべて成立すると記したが最後の〈定理 7.19〉は記述の変更を要する．それについて興味ある議論が可能となるがその一部を簡単に説明しよう．

力学系 $(X, \mathcal{F}_X, \mu, G)$ における変換群が確率測度 μ に関して **m-群**であるとは

$$\mu(\{x\in X\ ;\ tx=x\})=0,\quad \forall t\in G,\quad t\neq e$$

（e は G の単位元）のときをいう．これは Murray と von Neumann [M 7] が定義したものであり，後に，Rohlin が導入した非周期性 (aperiodicity) と同じものである．

〈定理 7.19〉は力学系 $(X, \mathcal{F}_X, \mu, G)$ において次のようにいい直せる．$l^1(\boldsymbol{Z}, X, G, \mu)$ は上述の通りであり，Hilbert 空間 $l^2(G, X, \mu)$ はテンソル積 $l^2(G)\otimes L^2(X,\mu)$，有界要素のなす $*$ 代数は $\boldsymbol{B}\equiv\boldsymbol{B}(G,X,\mu)$ であり $L^\infty\equiv L^\infty(X,\mu)$ は $\boldsymbol{B}$ の $*$ 部分代数，von Neumann 代数 $\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}(G,X,\mu)$ と $\mathcal{L}^\infty\equiv\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ は情報源 $[A^{\boldsymbol{Z}},\mu]$ にシフト $\{T_n\}$ を接合して構成した代数と全く同様にして定められる．これらの記号の下で，各条件（1），（2），（3）はすべて，次の条件（4）と同等である：

（4）　G は μ に関して m-群である．

したがって，$X=A^{\boldsymbol{Z}}$ のとき $G=\{T_n\ ;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ は m-群であることがわかる．

この節において，$X=A^{\boldsymbol{Z}}$ に限定して論じたが，そこで G としてシフト変換 T だけでなく $\boldsymbol{Z}$ の種々な置換群を当てはめることにより，さらに接合積の細かい議論が可能となり，それがメッセージ空間上の符号化の議論にも関連付けられる可能性がある．そのことを含め，この節の内容は [U 3, 9] などを参照した．接合積については [N 1, 2] を参照．他に [B 10, 11] も有用である．

第8章　量子論的エントロピー

この章では，主に Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の密度作用素によって表される状態のエントロピーについて議論する．

von Neumann は彼の画期的な著書［V 4］によって量子力学が Hilbert 空間に記述されることを明らかにした．$\mathscr{H}$ を可分な複素 Hilbert 空間とすると，物理的な観測量は $\mathscr{H}$ 上の Hermite 作用素であり，この観測量 A を純粋状態 $x\in\mathscr{H}$ で観測したとき得られる期待値は $\langle x, Ax\rangle$ で表せる．なお，測定のために準備される状態は必ずしも純粋状態とは限らず，純粋状態が混ざり合ったもの，いわゆる混合状態になる場合もある．このことを考慮すると，量子系の状態は，トレースが1になる $\mathscr{H}$ 上のトレースクラス作用素（付章 1.6 項参照）ρ で表され，A を ρ で観測したとき得られる期待値は $\mathrm{tr}\,\rho A$ で与えられる（第6章の 6.4 節）．この ρ は密度作用素，あるいは密度行列とよばれ，この作用素の集合は $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})_{+,1}$ で表される．すなわち，$\boldsymbol{T}(\mathscr{H})_{+,1}=\{\rho\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H});\rho\geqq 0,\ \mathrm{tr}\,\rho=1\}$ である．ここで $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ は $\mathscr{H}$ 上の有界線形作用素の全体である．

ところで，量子系の力学変化は Heisenberg 描像または Schrödinger 描像によって記述されるが，前者は観測量の時間変化を追跡するものであり，後者は状態の時間変化を追跡するものであった．今，系の Hamiltonian を H とし，H によって生成されるユニタリー作用素を $U_t=\exp itH$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ とすると，$t=0$ での観測量 A は時刻 t では U_tAU_{-t}（$\equiv\boldsymbol{\alpha}_t(A)$ と書く）に変化していると考えられ，したがって，状態 ρ での時刻 t における期待値は $\mathrm{tr}\,\rho\boldsymbol{\alpha}_t(A)$ となる．これが Heisenberg 流の見方である．一方 Schrödinger 描像では，状態 ρ が変化する．つまり，時刻 $t=0$ で ρ にあった状態は時刻 t で $U_{-t}\rho U_t(\equiv\boldsymbol{\alpha}_t{}^*(\rho))$ に変化しており，観測量 A の期待値は $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\alpha}_t{}^*(\rho)A$ で

与えられる．これら2つの期待値は，トレースの性質より相等しい．

以上見てきたように，観測量の集合を $\boldsymbol{O}(\mathcal{H})$ とすると量子力学系は3つ組 $(\boldsymbol{O}(\mathcal{H}), \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}, \alpha(\boldsymbol{R}))$ で記述されることになる．とくに，有界作用素のみを考えるときは，$\boldsymbol{O}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に属する自己共役元の集合 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})_{s.a.}$ である．

この章では，前述したように，状態 $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ のエントロピー $S(\rho)$ の様々な性質を調べることがその主たる目的であるが，そのために必要な数学的道具は付章1にかなり詳しくまとめてある．さらに，8.5 節で $S(\rho)$ の拡張である C^* 力学系の状態のエントロピーについて概説する．

なお，本章以下，とくに断わらなければ，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は常に可分であると仮定する．

8.1 量子論的エントロピー $S(\rho)$ の導入

von Neumann は密度作用素 $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$（以下，**状態**という）の有する“不確定さ”を表す量，エントロピー $S(\rho)$ を

$$S(\rho)=-\mathrm{tr}\,\rho\log\rho \tag{8.1}$$

と定めた．以下，これを **von Neumann エントロピー**（v.N. エントロピーと略）ということもある．すなわち，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のある完全正規直交系（以下，CONS と略する）を $\{x_n\}$ とすると，

$$S(\rho)=-\sum_n\langle x_n, \rho\log\rho x_n\rangle$$

である．しかも，これは CONS $\{x_n\}$ の選び方に依存していない（付章 1.6 項を参照）．

ところで，$\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ のスペクトルは離散的であるから，そのスペクトル分解は，一意に，

$$\rho=\sum_n\lambda_nP_n \tag{8.2}$$

と書ける．ここで λ_n は ρ の固有値，P_n は λ_n に関する固有空間への $\mathcal{H}$ からの射影作用素である．したがって，各 λ_n に縮退がなければ，P_n の値域の

次元は1である（これを，$\dim P_n=1$ と書く）．ある固有値 λ_n が縮退している場合は，$\dim P_n \geqq 2$ であるが，この P_n は1次元射影作用素にさらに分解される．

$$P_n=\sum_{j=1}^{\dim P_n} E_j^{(n)} \tag{8.3}$$

ここで，$E_j^{(n)}$ は1次元射影作用素で，ρ の λ_n に関する固有ベクトルを $x_j^{(n)}$ $(j=1,\cdots,\dim P_n)$ とすると $E_j^{(n)}=x_j^{(n)}\otimes\overline{x_j^{(n)}}$，または，Dirac 記号を使って書くと $E_j^{(n)}=|x_j^{(n)}\rangle\langle x_j^{(n)}|$ と表せるものである．上の記号 $x\otimes\bar{y}$ は Schatten 積といわれているもので詳細は付章1.4項に説明してある．これらの1次元射影 $\{E_j^{(n)}\}_{j,n}$ の添字 j,n を適当に付け変えて，

$$\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_n\geqq\cdots \tag{8.4}$$

$$E_n\perp E_m \quad (n\neq m) \tag{8.5}$$

$$\rho=\sum\lambda_n E_n \tag{8.6}$$

と書き表し，この分解を **Schatten 分解（von Neumann-Schatten 分解）** とよぶことにする．なお，(8.4) において，重複度が2以上の固有値はその回数だけ繰り返し現れている．たとえば，λ_1 の重複度が2のときは，$\lambda_1=\lambda_2$ である．また，単純でない固有値に対する分解 (8.3) は一意でないことから，すべての固有値が単純でなければ，分解 (8.6) も一意ではない．たとえば，ρ の1つの固有値 μ の多重度が2であるとし，x_1, x_2 をその互いに直交する固有ベクトルとし，さらに $y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2)$，$y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)$ とおくと，ρ は次の2つの異なる分解をもつ．

$$\rho=\mu(|x_1\rangle\langle x_1|+|x_2\rangle\langle x_2|)+\text{他の項}$$

$$\rho=\mu(|y_1\rangle\langle y_1|+|y_2\rangle\langle y_2|)+\text{他の項}$$

ただし，ρ の任意の2つの分解 $E=\{E_n\}, E'=\{E_n'\}$ に対して，ユニタリー作用素 U が存在して，

$$E_n'=UE_nU^*$$

となる．以上の事実より，$\mathcal{H}$ の CONS として ρ の固有ベクトルを含むものを選ぶと，簡単な計算の結果

$$S(\rho)=-\sum\lambda_n\log\lambda_n \tag{8.7}$$

が得られる．$\rho\geqq 0$，$\mathrm{tr}\,\rho=1$ より $\lambda_n\geqq 0$（$\forall n$），$\sum\lambda_n=1$ となるから，(8.7) は確率分布 $\{\lambda_n\}$ の Shannon のエントロピーと見なせる．よって

$$S(\rho)\geqq 0 \tag{8.8}$$

である．等号は ρ が純粋状態，すなわち，$\rho^2=\rho$ のとき成立する．

いま，P を $\mathcal{H}$ から W 次元の閉部分空間 $\mathcal{L}$ への射影作用素とし，$\rho=\frac{1}{W}P$ とおくと，$\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ で，$S(\rho)=\log W$ となり，$S(\rho)$ は W 個の状態が等確率で存在する場合の Boltzmann のエントロピーに一致している．

こうして，確率分布に関する古典的エントロピーの量子力学版である状態 ρ に関するエントロピー $S(\rho)$ が導入されたのである．

では，相対エントロピーの量子力学版はどうなるであろうか？ Umegaki [U 6] は半有限かつ σ-有限（付章 2.8 および付章 2.9 項）な von Neumann 代数に対して，量子論的相対エントロピーを定式化した．とくに，von Neumann 代数が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ であるときは，2つの状態 $\rho,\sigma\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ に関して，**Umegaki の相対エントロピー**は

$$S(\rho|\sigma)\equiv\begin{cases}\mathrm{tr}\,\rho(\log\rho-\log\sigma) & (s(\rho)\leqq s(\sigma))\\ +\infty & (\text{その他})\end{cases} \tag{8.9}$$

で与えられる．ここで，$s(\rho)$ は ρ の台である．

函数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が C^1 級で，凸であるとき，任意の $\rho,\sigma\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ に対して，

$$\mathrm{tr}\{f(\rho)-f(\sigma)-(\rho-\sigma)f'(\sigma)\}\geqq 0 \tag{8.10}$$

が成立する．実際，$\rho x_n=\lambda_n x_n$, $\sigma y_n=\mu_n y_n$ なる固有ベクトル x_n, y_n を含む $\mathcal{H}$ の2つの CONS $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ に対して，$c_{ij}=\langle x_i, y_j\rangle$ とおくと，$\sum_i|c_{ij}|^2=\sum_j|c_{ij}|^2=1$ より，

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\{f(\rho)-f(\sigma)-(\rho-\sigma)f'(\sigma)\}\\&=\sum_i\{f(\lambda_i)-\sum_j|c_{ij}|^2f(\mu_j)-\sum_j|c_{ij}|^2(\lambda_i-\mu_j)f'(\mu_j)\}\\&=\sum_{i,j}|c_{ij}|^2\{f(\lambda_i)-f(\mu_j)-(\lambda_i-\mu_j)f'(\mu_j)\}.\end{aligned}$$

これは，f が凸函数であることより正値である．(8.10) はより一般的に次の

ように表せる.

〈定理 8.1〉 Klein の不等式： 凸 C^1 級函数 $f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ と任意の自己共役作用素 A, B に対して次の不等式が成立する.

$$\mathrm{tr}\{f(A)-f(B)-(A-B)f'(B)\}\geqq 0$$

証明も本質的に上の (8.10) の場合と同じであるので，ここでは繰り返さない．読者自ら試みてほしい．とくに，CONS $\{x_k\}$ と自己共役作用素Aに対して，$\langle x_i, Bx_j\rangle=\delta_{ij}\langle x_i, Ax_i\rangle$ と B を定めると

$$\sum_k f(\langle x_k, Ax_k\rangle)\leqq \mathrm{tr}\, f(A) \quad \text{(\textbf{Peierls 不等式})}. \tag{8.11}$$

が成立する． この定理より， $S(\rho/\sigma)=\mathrm{tr}\,\rho(\log\rho-\log\sigma)\geqq\mathrm{tr}(\rho-\sigma)=0$ となり，相対エントロピーの**正値性**が示される.

この節の最後に **Renyi エントロピー**の量子系への拡張を考えてみよう．正の数 $\alpha(\neq 1)$ に対して，

$$S_\alpha(\rho)=(1-\alpha)^{-1}\log\ \mathrm{tr}\,\rho^\alpha \tag{8.12}$$

とおくと，これがα次 Renyi エントロピーの量子力学版である．ρ の Schatten 分解 (8.6) を使うと，

$$S_\alpha(\rho)=(1-\alpha)^{-1}\log\sum_n \lambda_n{}^\alpha$$

となり，古典論の表現（第 4 章 §1）に一致する．したがって，

$$S(\rho)=\lim_{\alpha\to 1}S_\alpha(\rho)$$

が成立する.

8.2 $S(\rho)$ の凹性と連続性

この節では von Neumann エントロピー $S(\rho)$ の凹性と連続性について議論する．以下，とくに断わらない限り，ρ と σ は $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ の元とし，$\rho=\sum\lambda_n E_n$ と書けば，これは (8.4)～(8.6) を満たす Schatten 分解とする.

前節で示したように，$S(\rho)$ は性質

〈**N.1**〉　**正値性**：$S(\rho)\geqq 0$

を有する．また，任意のユニタリー作用素 U によって，ρ を $\rho'=U\rho U^*$ に変換すると，

$$S(\rho')=-\operatorname{tr} U\rho U^*\log U\rho U^*=-\operatorname{tr} U\rho\log\rho U^*$$
$$=-\operatorname{tr}\rho\log\rho=S(\rho)$$

となり，$S(\rho)$ がユニタリー変換の下で不変であることがわかる．さらに，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に他の Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ を加えて新たな Hilbert 空間 $\mathcal{H}'=\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ をつくるとき，$\rho'=\rho\oplus 0$ とおくと，$\rho'\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}')_{+,1}$ であり，ρ' のスペクトル集合 $\mathrm{Sp}(\rho')$ は $\mathrm{Sp}(\rho')=\mathrm{Sp}(\rho)\cup\{0\}$ であるから，この変換 $\rho\to\rho'$ に関しても $S(\rho)$ は不変である．先のユニタリー変換の下では $\mathrm{Sp}(\rho')=\mathrm{Sp}(\rho)$ であるから，次の結論をうる．

〈**N.2**〉　**不変性**：ある変換 $\rho\to\rho'$ に対して，$\mathrm{Sp}(\rho')\cup\{0\}=\mathrm{Sp}(\rho)\cup\{0\}$ であれば，$S(\rho')=S(\rho)$ である．

任意の $\rho_1,\rho_2\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ に対して，$\rho=\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2\,(\forall\lambda\in(0,1))$ とおくと，次が成立する．

〈**N.3**〉　**凹性**：$S(\rho)\geqq\lambda S(\rho_1)+(1-\lambda)S(\rho_2)$．

証明　$\mathcal{H}$ のある CONS $\{x_n\}$ が存在して，$\rho=\sum_n\lambda_n E_n$，$E_n=x_n\otimes\bar{x}_n$ と表せる．このとき，$\lambda_n=\langle x_n,\rho x_n\rangle$．そこで，$\eta(t)=-t\log t$ $(\forall t\in[0,1])$ が凹函数であるから，

$$\begin{aligned}S(\rho)&=-\sum_n\lambda_n\log\lambda_n=\sum_n\eta(\langle x_n,\rho x_n\rangle)=\sum_n\eta(\lambda\langle x_n,\rho_1x_n\rangle\\&\quad+(1-\lambda)\langle x_n,\rho_2x_n\rangle)\geqq\lambda\sum_n\eta(\langle x_n,\rho_1x_n\rangle)\\&\quad+(1-\lambda)\sum_n\eta(\langle x_n,\rho_2x_n\rangle)\\&\geqq\lambda\sum_n\langle x_n,\eta(\rho_1)x_n\rangle+(1-\lambda)\sum_n\langle x_n,\eta(\rho_2)x_n\rangle\end{aligned}$$

$$\geqq \lambda S(\rho_1)+(1-\lambda)S(\rho_2).$$

ここで，最後の不等式は Peierls の不等式 (8.11) による．▌

この定理の証明と同様な方法で次の 1°，2° が証明される．

1°　$\sum_n \lambda_n=1$ なる $\lambda_n\geqq 0$ に対して，$\rho=\sum_n \lambda_n\rho_n,\ \rho_n\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H})_{+,1}$ とおくと，$S(\rho)\geqq \sum_n \lambda_n S(\rho_n)$ が成立する．

2°　f が任意の凹函数のとき，函数 $\rho\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H})_{+,1}\to \mathrm{tr}\, f(\rho)$ も凹函数である．

凹性の証明は難解なものではないが，一般に2つの状態 $\rho,\ \sigma$ の非可換性 (i. e.，$[\rho,\sigma]\equiv\rho\sigma-\sigma\rho\neq 0$) のため，これから議論する $S(\rho)$ の様々な性質の証明は古典論の場合に比べて難しくなる．

以下の定理と補題において，$\sum_n \lambda_n=1$ なる $\lambda_n\geqq 0,\ \rho_n\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H})_{+,1}$ を使って表される状態 $\rho=\sum_n \lambda_n\rho_n$ を考える．

〈定理 8.2〉　$\rho=\sum_n \lambda_n\rho_n$ に対して，

$$S(\rho)\leqq \sum_n \lambda_n S(\rho_n)-\sum_n \lambda_n \log \lambda_n$$

が成立する．等号は $\rho_n\perp\rho_m$ (i. e.，$\mathrm{ran}\,\rho_n\perp \mathrm{ran}\,\rho_m$，$n\neq m$) のとき成立．

この定理を証明する前に，2つの補題を証明する．これらの補題はそれ自体有用なものである．

〈補題 8.3〉　2つの正の減少数列 $\{a_k\},\{b_k\}$ において，$\sum_k a_k=\sum_k b_k=1$ であり，$\sum_{k=1}^n a_k\leqq \sum_{k=1}^n b_k$ が任意の $n\in \boldsymbol{N}$ に対して成立するとき，

$$-\sum_k a_k\log a_k\geqq -\sum_k b_k \log b_k$$

である．

証明　条件より，

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\log a_k=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(\log a_n-\log a_{n+1})$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)(\log a_n - \log a_{n+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \log a_k$$

$$\leqq \sum b_k \log b_k.$$

最後の不等式は第1章の〈定理 1.2〉の（1）による．▌

〈**補題 8.4**〉 $\rho = \sum_n \lambda_n \rho_n$ で，$\dim(\mathrm{ran}\,\rho_n)=1$（すなわち，$\rho_n$ は1次元射影作用素）のとき，

$$S(\rho) \leqq -\sum_n \lambda_n \log \lambda_n$$

である．等号は $\rho_n \perp \rho_m$ $(n \neq m)$ のとき成立する．

証明　ρ の Schatten 分解を $\rho = \sum_k p_k E_k$ とする．ここで，$p_1 \geqq p_2 \cdots$ と固有値 $\{p_k\}$ を並べてある．また，$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots$ としても一般性を失わないから，〈補題 8.3〉より，任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して，$\sum_{k=1}^{n} p_k \geqq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ を示せばよい．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の任意の直交系（ONS）$\{x_k\}$ に対して，p_k は ρ の固有値だから，

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \geqq \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, \rho x_k \rangle$$

が成立する．ここで，$\mathcal{H}^{(n)} = \bigvee_{k=1}^{n} \rho_k \mathcal{H}$（すなわち，$\rho_1\mathcal{H}, \cdots, \rho_n\mathcal{H}$ から生成された閉部分空間）とおくと，ρ_k は1次元射影作用素であるから，$\dim \mathcal{H}^{(n)} \leqq n$（等号は $\rho_i \perp \rho_j (i \neq j)$ のとき成立）．$m = \dim \mathcal{H}^{(n)}$ とおき，$\mathcal{H}^{(n)}$ の CONS を $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ とする．このとき

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \geqq \sum_{k=1}^{m} p_k \geqq \sum_{k=1}^{m} \langle x_k, \rho x_k \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x_k, \rho_i x_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_i \langle x_k, \rho_i x_k \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,\mathrm{tr}\, \rho_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

さらに，$\rho_n \perp \rho_m (n \neq m)$ とすると，$\rho = \sum_n \lambda_n \rho_n$ は Schatten 分解になるから，$\lambda_n = p_n$．ゆえに，$S(\rho) = -\sum_n \lambda_n \log \lambda_n$．▌

定理 8.2 の証明 $\rho=\sum_n \lambda_n\rho_n$ の各 ρ_n の Schatten 分解を $\rho_n=\sum_k \alpha_k^{(n)}E_k^{(n)}$ とおく．このとき，$\dim E_k^{(n)}=1$ で，$\rho=\sum_{n,k}\lambda_n\alpha_k^{(n)}E_k^{(n)}$ であるから，〈補題 8.4〉より

$$S(\rho)\leqq-\sum_{n,k}\lambda_n\alpha_k^{(n)}\log\lambda_n\alpha_k^{(n)}$$
$$=-\sum_n\lambda_n\log\lambda_n+\sum_n\lambda_n S(\rho_n).$$

とくに，$\rho_n\perp\rho_m\,(n\neq m)$ のときは，任意の $i\neq j$ に対して $E_i^{(k)}\perp E_j^{(l)}$ となるから，$\rho=\sum_{n,k}\lambda_n\alpha_k^{(n)}E_k^{(n)}$ は Schatten 分解となり，等号が成立する．▌

〈補題 8.4〉より，$S(\rho)$ は，ρ の純粋状態への分解を $\rho=\sum_n\lambda_n\rho_n$ とすると，

$$S(\rho)=\inf\{-\sum_n\lambda_n\log\lambda_n\ ;\ \{\lambda_n\}\} \tag{8.13}$$

である．

さて，$S(\rho)$ の連続性について調べよう．すなわち，$\|\cdot\|_1$ ノルムに関して，状態 ρ_n が ρ に収束するとき，$S(\rho_n)\to S(\rho)$ となるかどうかを調べてみよう．第 10 章で詳しく論ずる作用素エントロピー $\hat{S}(\rho)=-\rho\log\rho$ は有界作用素であるから，$\|\rho_n-\rho\|\to0$ のとき，$\|\hat{S}(\rho_n)-\hat{S}(\rho)\|\to0$ であるが，$\|\rho_n-\rho\|\to0$ より強い条件 $\|\rho_n-\rho\|_1\to0$ の下でも $S(\rho_n)\to S(\rho)$ は一般には成立しない．なお，ノルム $\|\cdot\|_1$ の定義，その他については付章 1.6 参照．

〈**N.4**〉 **下半連続性**：$\|\rho_n-\rho\|_1\to0$ であるとき，

$$S(\rho)\leqq\liminf_{n\to\infty}S(\rho_n).$$

証明 多重度を考慮して，ρ_n の固有値 $\{\lambda_k(\rho_n)\}$ を $\lambda_1(\rho_n)\geqq\lambda_2(\rho_n)\geqq\cdots$ と並べ，ρ の固有値 $\{\lambda_k(\rho)\}$ も $\lambda_1(\rho)\geqq\lambda_2(\rho)\geqq\cdots$ と並べる．$\rho_n=\rho_n-\rho+\rho$ より，$\rho_n\leqq|\rho_n-\rho|+\rho$．ただし，$|A|\equiv(A^*A)^{1/2}$ である．ゆえに，任意の $k\in\boldsymbol{N}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^k\lambda_i(\rho_n)\leqq\mathrm{tr}|\rho_n-\rho|+\sum_{i=1}^k\lambda_i(\rho),$$

同様にして，$\rho\leqq|\rho-\rho_n|+\rho_n$ より，

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\rho) \leqq \mathrm{tr}|\rho-\rho_n| + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\rho_n).$$

よって，$\|\rho_n-\rho\|_1=\mathrm{tr}|\rho_n-\rho|\to 0$ であるから，

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \{\lambda_i(\rho_n)-\lambda_i(\rho)\}\right| \to 0.$$

したがって，k は任意であるから各 i に対して，$\lambda_i(\rho_n)\to\lambda_i(\rho)$．よって，固定した $k\in\boldsymbol{N}$ に対して，

$$-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\rho)\log\lambda_i(\rho) = \lim_{n\to\infty}\left\{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\rho_n)\log\lambda_i(\rho_n)\right\}.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} S(\rho) &= \sup_k\left\{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\rho)\log\lambda_i(\rho)\right\} \\ &= \sup_k \lim_{n\to\infty}\left\{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\rho_n)\log\lambda_i(\rho_n)\right\} \\ &\leqq \liminf_{n\to\infty} \sup_k \left\{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\rho_n)\log\lambda_i(\rho_n)\right\} = \liminf_{n\to\infty} S(\rho_n). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

この下半連続性は次の補題から，$\rho_n \xrightarrow{w} \rho$（弱収束）の場合でも成立することがわかる．

〈補題 8.5〉 $\rho_n \xrightarrow{w} \rho$ ならば $\|\rho_n-\rho\|_1\to 0$

証明 $\sigma\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ と任意の $\varepsilon>0$ に関して，$\mathrm{tr}\,\sigma E<\varepsilon$ を満たす射影作用素 E をとる．このとき σ の Schatten 分解を $\sigma=\sum\alpha_k E_k$，$E_k=|x_k\rangle\langle x_k|$ とおくと，$\mathrm{tr}\,\sigma E=\sum\alpha_k\|Ex_k\|^2<\varepsilon$ より，任意の $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，

$$|\mathrm{tr}\,\sigma EA| \leqq \sqrt{\varepsilon}\,\|A\|. \tag{8.14}$$

ところで，$\rho_n \xrightarrow{w} \rho$ と，任意の $A\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathrm{tr}\,\rho_n A\to\mathrm{tr}\,\rho A$ とは同値である（付章 2.7 項の〈定理 2.19〉）．ゆえに，$\rho_n \xrightarrow{w} \rho$ のとき，

$$\mathrm{tr}\,\rho_n(I-A)\to\mathrm{tr}\,\rho(I-A), \quad \forall A\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H}). \tag{8.15}$$

ρ の固有ベクトル $\{x_n\}$ において，$x_1,\cdots,x_N$ の生成する $\mathcal{H}$ の閉部分空間を $\mathcal{H}_N$ とし，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_N$ への射影作用素を E とする．いま，任意の $\varepsilon>0$ に対して，番号 N を $\mathrm{tr}\,\rho(I-E)<\varepsilon$ となるように選ぶ．この E と任意の

$A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，

$$\mathrm{tr}(\rho_n-\rho)A=\mathrm{tr}\,\rho_n(I-E)A+\mathrm{tr}(I-E)\rho_n EA$$
$$+\mathrm{tr}(\rho_n-\rho)EAE+\mathrm{tr}(E\rho E-\rho)A.$$

さて，$E\boldsymbol{B}(\mathcal{H})E$ は有限次元代数であるから，$E\boldsymbol{B}(\mathcal{H})E$ 上では ρ_n は ρ に任意の位相で収束する．したがって，十分大きな n で，$|\mathrm{tr}(\rho_n-\rho)EAE|\leqq \varepsilon\|EAE\|\leqq\varepsilon\|A\|$．また，条件より $|\mathrm{tr}(E\rho E-\rho)A|\leqq\|A\|\mathrm{tr}\,\rho(I-E)\leqq\varepsilon\|A\|$．さらに，$E\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$ であるから，(8.15) より，$\mathrm{tr}\,\rho_n(I-E)\to\mathrm{tr}\,\rho(I-E)<\varepsilon$．よって，十分大きな n で，$\mathrm{tr}\,\rho_n(I-E)<2\varepsilon$ であるから，(8.14) より，任意の $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，$|\mathrm{tr}\,\rho_n(I-E)A|\leqq\sqrt{2\varepsilon}\|A\|$ および，$|\mathrm{tr}(I-E)\rho_n EA|\leqq\sqrt{2\varepsilon}\|A^*E\|$ が成立する．したがって，十分大きな n に対して，

$$\|\rho_n-\rho\|_1\equiv\sup\{|\mathrm{tr}(\rho_n-\rho)A|\ ;\ A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),\|A\|\leqq 1\}\leqq(2\varepsilon+\sqrt{2\varepsilon}).$$

となり，$\rho_n\xrightarrow{w}\rho$ ならば $\|\rho_n-\rho\|_1\to 0$ が証明された．▮

なお，Renyi の α 次エントロピー $S_\alpha(\rho)$ の連続性に関しては，肯定的な答がえられている．

〈定理 8.6〉 $\alpha>1$ のとき，$S_\alpha(\rho)$ はノルム $\|\cdot\|_1$ に関して連続である．

証明 $\alpha>1$ だから，任意の $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ に対して，$\mathrm{tr}\,\rho^\alpha<1$．したがって，$\|\rho_n-\rho\|_1\to 0$ とすると，

$$|(\mathrm{tr}\,\rho_n{}^\alpha)^{1/\alpha}-(\mathrm{tr}\,\rho^\alpha)^{1/\alpha}|\leqq(\mathrm{tr}|\rho_n-\rho|^\alpha)^{1/\alpha}\leqq(\mathrm{tr}|\rho_n-\rho|)^{1/\alpha}\to 0.$$

ゆえに，$S_\alpha(\rho_n)\to S_\alpha(\rho)$．▮

この定理を使うと，$S(\rho)$ の下半連続性〈N.4〉は次のように簡単に証明できる．

$$S_\alpha(\rho)=(1-\alpha)^{-1}\log\mathrm{tr}\,\rho^\alpha=-\log(\mathrm{tr}\,\rho^\alpha)^{1/(\alpha-1)}$$

であるから，$\alpha'\geqq\alpha>1$ であれば，$S_\alpha(\rho)\geqq S_{\alpha'}(\rho)$ となる．また，$\lim_{\alpha\to 1}S_\alpha(\rho)=S(\rho)$ であったから，

$$S(\rho)=\sup_{\alpha>1}S_\alpha(\rho) \tag{8.16}$$

となる．したがって，$\|\cdot\|_1$ に関する $S_\alpha(\rho)$ の連続性より，$S(\rho)$ は同じノルムに関して下半連続である．（連続函数列の上限は下半連続．）

$\mathcal{H}$ 上の有限階作用素の集合 $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ において稠密であり (i. e., $\overline{\boldsymbol{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|_1}=\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$), 任意の $\rho\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H})_{+,1}$ に対して, $S(\rho)<+\infty$ となるから, $S(\rho)$ が有限値をとる状態 $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ は十分たくさんあるように思えるが, 実は,

〈定理 8.7〉 集合 $\{\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}\,;\,S(\rho)<+\infty\}$ は第1類である.

証明 函数 $f(t)=\mathrm{tr}\,\rho^t,\ t\in\boldsymbol{R}$ は連続な凸函数であり, $S(\rho)=-\dfrac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=1}$ であるから, $S(\rho)<\infty$ であることと, 1の任意の近傍に有理数 $r(<1)$ が存在して, $f(r)<\infty$ となることは同値である. したがって,

$$\{\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}\,;\,S(\rho)<\infty\}=\bigcup_{r<1}\{\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}\,;\,\mathrm{tr}\,\rho^r<\infty\}.$$

$\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ の Schatten 分解を $\rho=\sum\lambda_nE_n$ とすると, $\mathrm{tr}\,\rho^r=\sum_n\lambda_n{}^r$ であるから, 上記の集合は

$$\bigcup_{r<1}\{\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}\,;\,\rho=\sum\lambda_nE_n\ (\text{Schatten 分解}),\ \sum_n\lambda_n{}^r<\infty\}$$

に一致する. ところで, 集合 $\bigcup_{r<1}\{\{\lambda_n\}\,;\,\sum\lambda_n{}^r<\infty,\lambda_n\geqq 0\}$ は数列空間 l^1 において, 第1類であるから, 集合 $\{\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}\,;\,S(\rho)<\infty\}$ も $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ において第1類である. ▌

この定理より, $S(\rho)$ はノルム $\|\cdot\|_1$ に関して, 連続でないばかりでなく, $S(\rho)<\infty$ なる $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ の任意の ε-近傍に, $S(\sigma)=\infty$ となる状態 $\sigma\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ が存在することがわかる. この定理と前の〈定理 8.6〉は Wehrl [W 2] によっている. さらに Lassner [L 3] は $S(\rho)<\infty$ となる状態 $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ の有限個の線形結合からつくられる集合は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルになっていることを示した.

では, どのような条件の下で $S(\rho)$ は連続になるであろうか? この問題に関する Simon [S 8] の結果を論じよう.

$\mathcal{H}$ 上の正のコンパクト作用素の集合 $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})_+$ の元 A に対して, $\lambda_k(A)$ を多重度も考慮した上での k 番目に大きい A の固有値とする. このとき, 函数 $\eta(t)=-t\log t$ ($\forall t\in\boldsymbol{R}^+$) に対して

$$S(A)=\sum_k \eta(\lambda_k(A)) \tag{8.17}$$

とおく．この $S(A)$ は，A が $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})_{+,1}$ の元であれば，von Neumann のエントロピーにほかならない．

さて，$\boldsymbol{C}(\mathscr{H})_+$ の2つの元 A, B に順序 $\prec$ を『$A\prec B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lambda_k(A)\leqq\lambda_k(B)$ $(\forall k)$』で定める．また，$\lambda_k(A_n)\to\lambda_k(A)\,(\forall k)$ のとき，点列 $\{A_n\}\subset\boldsymbol{C}(\mathscr{H})_+$ は $A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})_+$ に **λ-収束**するといい，$A_n\xrightarrow{\lambda}A$ で表すことにする．このとき，任意の射影作用素 E, F に対して，（1）$EAE\prec A$；（2）$E\leqq F$ ならば $EAE\prec FAF$；が容易にわかる．

以下，作用素 $A, B, A_n (n\in N)$ 等はすべて $\boldsymbol{C}(\mathscr{H})_+$ の元とする．

〈定理 8.8〉（1）$A_n\xrightarrow{\lambda}A$，（2）$A_n\prec B$ $(\forall n)$，（3）$S(B)<\infty$ であるとき，$\lim_{n\to\infty}S(A_n)=S(A)$．

証明 $\eta(t)=-t\log t$ は閉区間 $[0, e^{-1}]$ で単調増加であり，（3）より $\lambda_n(B)\to 0$ となるから，ある番号 k_0 が存在して，$\lambda_{k_0}(B)\leqq e^{-1}$．また，（1）と $\eta(t)$ の連続性から，$\eta(\lambda_k(A_n))\to\eta(\lambda_k(A))$．さらに，（2）と $\eta(t)$ の単調性より $\eta(\lambda_k(A_n))\leqq\eta(\lambda_k(B))$ $(\forall k\geqq k_0)$．したがって，有界収束定理より，$\sum_{k\geqq k_0}\eta(\lambda_k(A_n))\to\sum_{k\geqq k_0}\eta(\lambda_k(A))$．ところで，（1）より当然，$\sum_{k\leqq k_0-1}\eta(\lambda_k(A_n))\to\sum_{k\leqq k_0-1}\eta(\lambda_k(A))$ となるから，$\lim_{n\to\infty}S(A_n)=S(A)$． ∎

〈定理 8.9〉（1）$A_n\xrightarrow{w}A$，（2）$A_n\prec A$ $(\forall n)$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty}S(A_n)=S(A).$$

証明 まず $A_n\xrightarrow{\lambda}A$ を示す．min-max の原理（付章 1.4 項）によると，

$$\lambda_k(A)=\min\{\max\{\|Ax\|\,;\,\|x\|=1,\ x\perp\mathscr{K}\}\,;\,\dim\mathscr{K}=k-1\}$$

となるから，任意の番号 k と $\varepsilon>0$ に対して，$\mathscr{H}$ の k 次閉部分空間 $\mathscr{K}$ と番号 n_0 が存在して，

$$\langle x, A_n x\rangle\geqq(\lambda_k(A)-\varepsilon)\|x\|^2$$

が任意の $x\in\mathscr{K}$ と $n\geqq n_0$ に対して成立する．ゆえに，$\lambda_k(A_n)\geqq\lambda_k(A)-\varepsilon$

$(\forall n \geqq n_0)$．また，（2）より，$\lambda_k(A) \geqq \lambda_k(A_n)$ であるから，$A_n \xrightarrow{\lambda} A$．したがって，$S(A)<\infty$ ならば，〈定理 8.8〉より $\lim_{n\to\infty} S(A_n)=S(A)$．$S(A)=\infty$ のときは，任意の $M>0$ に対して，番号 n_0 が存在して，$\sum_{k=1}^{n_0}\eta(\lambda_k(A))>M$．ゆえに，$S(A_n) \geqq \sum_{k=1}^{n_0}\eta(\lambda_k(A))$ と $\lambda_k(A_n)\to\lambda_k(A)$ より，$S(A_n)\geqq M$．M は任意だから，$\lim_{n\to\infty} S(A_n)=\infty$．▌

状態 $\rho \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ の Schatten 分解 $\rho=\sum \lambda_n E_n$ に対して，

$$\rho_N=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k E_k \Big/ \sum_{k=1}^{N}\lambda_k \tag{8.18}$$

とおくと，$N<\infty$ では $\rho_N \in \boldsymbol{F}(\mathcal{H})_+$ で，$\rho_N \xrightarrow{w} \rho$ かつ，$\lambda_k(\rho_N) \leqq \lambda_k(\rho)=\lambda_k$ $(\forall k)$ となる．したがって，上記の定理より，$\lim_{N\to\infty} S(\rho_N)=S(\rho)$ である．これは，$S(\rho_N)$ を直接計算することによっても得られる．つまり，

$$S(\rho_N)=-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\log\lambda_k \Big/ \sum_{k=1}^{N}\lambda_k+\log\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\right)$$

$$\xrightarrow{N\to\infty} -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\log\lambda_k=S(\rho).$$

〈定理 8.10〉 （1）$A_n \xrightarrow{w} A$，（2）$A_n \leqq B\,(\forall n)$ (i.e., $B-A_n \in \boldsymbol{C}(\mathcal{H})_+$)，（3）$S(B)<\infty$ が満たされるとき，$\lim_{n\to\infty} S(A_n)=S(A)$．

証明 コンパクト作用素 B は有限階作用素で近似できる (i.e., $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})=\overline{\boldsymbol{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|}$) から，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\mathcal{H}$ の有限次元部分空間 $\mathcal{K}$ が存在して，$\langle x, Bx\rangle=\|B^{1/2}x\|^2<\varepsilon\|x\|^2$ が任意の $x\in\mathcal{K}^\perp$ に関して成立する．条件（2）より，$\|A_n{}^{1/2}x\|^2=\langle x, A_n x\rangle \leqq \langle x, Bx\rangle<\varepsilon\|x\|^2$ となり，したがって，条件（1）より $\|A^{1/2}x\|^2<\varepsilon\|x\|^2$ $(\forall x\in\mathcal{K}^\perp)$ となる．ここで，$A_n \xrightarrow{u} A$（一様収束）を示そう．任意の $x, y\in\mathcal{H}$ は $x=x_1+x_2$，$y=y_1+y_2$ ($x_1, y_1\in\mathcal{K}$，$x_2, y_2 \in\mathcal{K}^\perp$) と一意に分解できるから，

$$\begin{aligned}|\langle x, (A_n-A)y\rangle| &= |\langle x_1+x_2, (A_n-A)(y_1+y_2)\rangle| \\ &\leqq |\langle x_1, (A_n-A)y_1\rangle|+\|A_n{}^{1/2}x_1\|\|A_n{}^{1/2}y_2\| \\ &\quad +\|A^{1/2}x_1\|\|A^{1/2}y_2\|+\|A_n{}^{1/2}x_2\|\|A_n{}^{1/2}y_1\|\end{aligned}$$

$$+\|A^{1/2}x_2\|\|A^{1/2}y_1\|+\|A_n{}^{1/2}x_2\|\|A_n{}^{1/2}y_2\|$$
$$+\|A^{1/2}x_2\|\|A^{1/2}y_2\|$$

となり，これは十分大きな n に対して，ε のある定数倍より小さくなる．したがって，$A_n \xrightarrow{u} A$ となる．min-max の原理より $|\lambda_k(A_n)-\lambda_k(A)|\leqq\|A_n-A\|$ がわかるから，$A_n \xrightarrow{\lambda} A$ でもある．この結果と条件（3）より〈定理 8.8〉の条件が満たされる．ゆえに，$\lim_{n\to\infty} S(A_n)=S(A)$．▮

この節の最後に，ある物理的条件が満たされる状態に関しては，エントロピーが連続になることを見ておこう．

H を対象としている物理系の Hamiltonion とし，定数 $\beta(=1/kT)>0$ に対して，$e^{-\beta H}\in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ のとき

$$\rho_\beta=e^{-\beta H}/\mathrm{tr}\, e^{-\beta H} \tag{8.19}$$

とおく．これは温度 T の **Gibbs 状態**とよばれている．

〈定理 8.11〉 $\rho\in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ が $\mathrm{tr}\,\rho H\leqq \mathrm{tr}\,\rho_\beta H$ を満たせば，$S(\rho)\leqq S(\rho_\beta)$ である．

証明 $\mathrm{tr}\,\rho\log\rho_\beta=-\beta\,\mathrm{tr}\,\rho H-\log\mathrm{tr}\,e^{-\beta H}$ であり，また，$\mathrm{tr}\,\rho_\beta\log\rho_\beta=-\beta\,\mathrm{tr}\,\rho_\beta H-\log\mathrm{tr}\,e^{-\beta H}$ であるから，$\mathrm{tr}\,\rho H\leqq\mathrm{tr}\,\rho_\beta H$ より，

$$-\mathrm{tr}\,\rho\log\rho_\beta\leqq-\mathrm{tr}\,\rho_\beta\log\rho_\beta=S(\rho_\beta).$$

ここで，相対エントロピーの正値性（8.11）を使うと，

$$S(\rho)=-\mathrm{tr}\,\rho\log\rho\leqq-\mathrm{tr}\,\rho\log\rho_\beta\leqq S(\rho_\beta).\ ▮$$

この定理から，エネルギーの期待値が定数 $E_\beta\equiv\mathrm{tr}\,\rho_\beta H$ 以下になる状態の集合 $\mathcal{S}_\beta=\{\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}\,;\,\mathrm{tr}\,\rho H\leqq\mathrm{tr}\,\rho_\beta H\}$ の中でエントロピーを最大にするのは平衡状態（付章 3.1 項）ρ_β であることがわかる．このことは，平衡状態が最も無秩序な状態であること，言い換えれば最も多くの情報を内包している状態であることを示している．

ところで，**Helmholtz の自由エネルギー**

$$F(\rho,\beta,H)\equiv\mathrm{tr}\,\rho H-\frac{1}{\beta}S(\rho) \tag{8.20}$$

は相対エントロピー $S(\rho|\rho_\beta)$ を使うと，

$$F(\rho,\beta,H)=\frac{1}{\beta}S(\rho|\rho_\beta)-\frac{1}{\beta}\log\operatorname{tr}e^{-\beta H}$$

と表せるから，相対エントロピーの下半連続性（第9章の 9.3 節参照）より，$F(\rho,\beta,H)$ も ρ に関して下半連続になる．ゆえに，$\|\rho_n-\rho\|_1\to 0$ かつ $\operatorname{tr}\rho_n H\to\operatorname{tr}\rho H$ であれば，

$$F(\rho,\beta,H)\leqq\liminf_{n\to\infty}F(\rho_n,\beta,H).$$

この不等式は，(8.20) の定義より次の不等式と同等である．

$$S(\rho)\geqq\limsup_{n\to\infty}S(\rho_n).$$

したがって，$S(\rho)$ の下半連続性〈N.4〉より

$$\lim_{n\to\infty}S(\rho_n)=S(\rho)$$

を得る．

さらに，上記の条件 $\operatorname{tr}\rho_n H\to\operatorname{tr}\rho H$ を次の条件に置き変えることもできる．

〈定理 8.12〉 $\operatorname{tr}e^{-\beta H}<+\infty$ $(0<\forall\beta<\infty)$ のとき，$S(\rho)$ は集合 $\mathcal{S}_c\equiv\{\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}\,;\operatorname{tr}\rho H\leqq c\}$ 上でノルム $\|\cdot\|_1$ に関して連続である．ただし，c はある正の定数．

証明　$\mathcal{S}_c$ に属する列 $\{\rho_n\}$ が $\|\rho_n-\rho\|_1\to 0$, $\rho\in\mathcal{S}_c$ であるとき，

$$\beta\operatorname{tr}\rho H-S(\rho)\leqq\liminf_{n\to\infty}\{\beta\operatorname{tr}\rho_n H-S(\rho_n)\}$$

より

$$\begin{aligned}-S(\rho)&\leqq\liminf_{n\to\infty}\{-S(\rho_n)\}+\limsup_{n\to\infty}|\beta\operatorname{tr}\rho_n H|+\beta\operatorname{tr}\rho H\\&\leqq\liminf_{n\to\infty}\{-S(\rho_n)\}+2\beta c.\end{aligned}$$

ゆえに，$S(\rho)\geqq\limsup_{n\to\infty}S(\rho_n)$．したがって，$S(\rho)$ の下半連続性から，$\lim_{n\to\infty}S(\rho_n)=S(\rho)$．▮

8.3　$S(\rho)$ の加法性

この節では $S(\rho)$ の有する様々な加法性，すなわち，加法性，劣加法性，強

劣加法性について論ずる．

Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ で記述されている2つの独立な力学系の合成系はテンソル積 $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ で記述することができるが，それぞれの系の状態 ρ_1, ρ_2 が互いになんの相関ももっていなければ，合成系の状態は $\rho_1\otimes\rho_2$ で表される．このとき，

〈N.5〉 **加法性**：$S(\rho_1\otimes\rho_2)=S(\rho_1)+S(\rho_2)$

証明 $\rho_1=\sum_k p_k E_k$, $\rho_2=\sum_l q_l F_l$ を Schatten 分解すると，$\rho_1\otimes\rho_2=\sum_{k,l} p_k q_l E_k\otimes F_l$ もひとつの Schatten 分解であるから，$S(\rho_1\otimes\rho_2)=-\sum_{k,l} p_k q_l \log p_k q_l =S(\rho_1)+S(\rho_2)$． ▮

Hilbert 空間 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ 上の状態空間 $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ の任意の元 ρ に対して，

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}\rho\equiv\sum_n\langle x_n^{(2)}, \rho x_n^{(2)}\rangle \quad (=\rho_1 \text{ とおく})$$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1}\rho\equiv\sum_n\langle x_n^{(1)}, \rho x_n^{(1)}\rangle \quad (=\rho_2 \text{ とおく})$$

と**部分トレース** $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1}, \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}$ を定める．ここで，$\{x_n^{(k)}\}$ $(k=1,2)$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_k$ の任意の CONS である．これらの部分トレースは簡単のため，$\mathrm{tr}_1, \mathrm{tr}_2$ と書くこともある．さらに，$\rho_k(k=1,2)$ は $\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_k)_{+,1}$ の元であり，また，ρ_1, ρ_2 が純粋状態となる場合には，$\mathrm{tr}_1\rho=\rho_1$, $\mathrm{tr}_2\rho=\rho_2$ をみたす状態 ρ は $\rho=\rho_1\otimes\rho_2$ であることが容易にわかる．

上記の ρ, ρ_1, ρ_2 に関して次が成立する．

〈N.6〉 **劣加法性**：$S(\rho)\leqq S(\rho_1)+S(\rho_2)$.

証明 ρ と $\rho_1\otimes\rho_2$ の相対エントロピーを計算すると，

$$\begin{aligned}S(\rho|\rho_1\otimes\rho_2)&=\mathrm{tr}\,\rho(\log\rho-\log\rho_1\otimes\rho_2)\\&=\mathrm{tr}\,\rho\log\rho-\mathrm{tr}\,\rho\log\rho_1\otimes I_2-\mathrm{tr}\,\rho\log I_1\otimes\rho_2\\&=\mathrm{tr}\,\rho\log\rho-\mathrm{tr}\,\rho_1\log\rho_1-\mathrm{tr}\,\rho_2\log\rho_2\\&=S(\rho_1)+S(\rho_2)-S(\rho)\end{aligned}$$

ここで，I_1, I_2 はそれぞれ $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 上の恒等作用素である．$S(\rho|\rho_1\otimes\rho_2)\geqq 0$

であるから劣加法性が成立する．∎

この劣加法性から凹性が次のように導かれる．$\mathscr{H}_2$ の任意の CONS を $\{x_k\}$ とする．このとき，$\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ は，$\mathscr{H}=\oplus_k(\mathscr{H}\otimes x_k)$ と表せる．したがって，$\rho_n\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H}_1)_{+,1}$ に対して，$\rho=\sum_n\lambda_n\rho_n\otimes E_n$（$\lambda_n\geqq 0$, $\sum_n\lambda_n=1$, $E_n=|x_n\rangle\langle x_n|$）とおくと，$\sigma_1\equiv \mathrm{tr}_{\mathscr{H}_2}\rho=\sum_n\lambda_n\rho_n$，$\sigma_2\equiv\mathrm{tr}_{\mathscr{H}_1}\rho=\sum_n\lambda_nE_n$ となり，〈定理 8.2〉より，

$$S(\rho)=\sum\lambda_nS(\rho_n\otimes E_n)-\sum\lambda_n\log\lambda_n.$$

ここで〈N.6〉を考慮すると，

$$S(\rho)\leqq S(\sigma_1)+S(\sigma_2)=S(\sum\lambda_n\rho_n)-\sum\lambda_n\log\lambda_n$$

であり，また，〈N.5〉より

$$S(\rho_n\otimes E_n)=S(\rho_n)+S(E_n)=S(\rho_n)$$

であるから，凹性

$$S(\sum\lambda_n\rho_n)\geqq\sum\lambda_nS(\rho_n)$$

がわかる．

ところで，古典的なエントロピーにおいては，2つの事象系 X, Y におけるエントロピー $S(X), S(Y)$ と合成系 $X\times Y$ のエントロピー $S(X, Y)$ の間には，

$$S(X, Y)\geqq\max\{S(X), S(Y)\}$$

の関係（単調性）があったが，この単調性は von Neumann エントロピーにおいては成立しない．実際，$\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ において，$x\in\mathscr{H}$ を

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1\otimes x_2+y_1\otimes y_2)$$

と定める．ここで，$x_k, y_k\in\mathscr{H}_k$ で，$\langle x_k, y_k\rangle=0$ とする．いま，$\rho=|x\rangle\langle x|$ とおくと，これは純粋状態であるから，$S(\rho)=0$．一方，$\rho_1\equiv\mathrm{tr}_{\mathscr{H}_2}\rho=\frac{1}{2}(|x_1\rangle\langle x_1|+|y_1\rangle\langle y_1|)$ となるから，$S(\rho_1)=2$．したがって，$S(\rho_1)>S(\rho)$ で単調性は成立していない．

ただし相対エントロピーは，後で詳しく見るように量子系に対しても，古典系の場合と同様単調性を有している．

さて，もうひとつの加法性，いわゆる強劣加法性について論じよう．格子系におけるエントロピーの議論などにおいて重要な役割を果たす強劣加法性は，長い間その証明が知られていなかったが，Lieb［L 5］の Wigner-Yanase-Dyson 予想に関する基本的仕事を土台として，1973 年 Lieb と Ruskai［L 4］によって証明された．

3つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ のテンソル積 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3$ 上の任意の状態 $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$（$\rho=\rho_{123}$ と書くこともある）に対して，縮約状態 ρ_{ij}, ρ_k（$i, j, k=1, 2, 3$）を次のように定める．

$$\rho_{ij}\equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_k}\rho \qquad (=\mathrm{tr}_k\rho)$$

$$\rho_k\equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_i\otimes\mathcal{H}_j}\rho \quad (=\mathrm{tr}_{ij}\rho)$$

このとき，次の強劣加法性が証明される．

〈N.7〉 強劣加法性：（1） $S(\rho)+S(\rho_2)\leqq S(\rho_{12})+S(\rho_{23})$．　（2） $S(\rho_1)+S(\rho_2)\leqq S(\rho_{13})+S(\rho_{23})$．

これを証明する前に2つの補題を証明しておこう［A 4］．以下，簡単のため，$S(\rho)=S_{123}$，$S(\rho_{ij})=S_{ij}$，$S(\rho_k)=S_k$ と書くことにする．

〈補題 8.13〉（1） $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ 上の純粋状態 ρ に対して，f をその定義域が $\rho_1\equiv\mathrm{tr}_2\,\rho$ および $\rho_2\equiv\mathrm{tr}_1\,\rho$ のスペクトルを含む実数値函数とすると，$\mathrm{tr}_1 f(\rho_1)=\mathrm{tr}_2 f(\rho_2)$．

（2） ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の任意の状態 ρ に対して，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上の純粋状態 σ が存在して，$\rho=\mathrm{tr}_{\mathcal{K}}\sigma$．

証明　（1）：条件より，$\{x_i\}$, $\{y_j\}$ をそれぞれ $\mathcal{H}_1$ および $\mathcal{H}_2$ の CONS とすると，ある $z=\sum_{i,j}c_{ij}x_i\otimes y_j$ を使って，$\rho=|z\rangle\langle z|$ と表せる．したがって，

$$\rho_1=\mathrm{tr}_2\,\rho=\sum_{i,j,k}\bar{c}_{ik}c_{jk}|x_i\rangle\langle x_j|$$

$$\rho_2=\mathrm{tr}_1\,\rho=\sum_{i,j,k}\bar{c}_{ki}c_{kj}|y_i\rangle\langle y_j|.$$

ゆえに，ρ_1 と ρ_2 の固有値は多重度まで含めて等しい．よって，$\mathrm{tr}_1 f(\rho_1)=\mathrm{tr}_2 f(\rho_2)$．

（2）：$\mathcal{H}$ の CONS $\{x_k\}$ とある $\lambda_k\geqq 0$ の数列 $\{\lambda_k\}$ を使って，$\rho=\sum\lambda_k |x_k\rangle\langle x_k|$ と書ける（Schatten 分解）．いま，$\dim\mathcal{K}\geqq\dim\mathcal{H}$ なる Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ をとってきて，$\{y_k\}$ を $\mathcal{K}$ の ONS とする．ここで，$z=\sum\lambda_k x_k\otimes y_k$，$\sigma=|z\rangle\langle z|$ とおくと，$\rho=\mathrm{tr}_{\mathcal{K}}\sigma$．▌

〈**補題 8.14**〉（1）　$|S_1-S_2|\leqq S_{12}\leqq S_1+S_2$．ただし，$S_1=S_2=\infty$ のときは，$S_1-S_2=0$ とみなす．

（2）〈N.7〉における（1）と（2）は同値．

証明　（1）：第2の不等式は劣加法性〈N.6〉であるから，第1の不等式を示せばよい．〈補題 8.13〉の（2）より，$\rho_{12}\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)_{+,1}$ に対して，第3の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_3$ と，純粋状態 $\sigma\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3)_{+,1}$ が存在して，$\rho_{12}=\mathrm{tr}_3\sigma$．ここで，$\sigma_3=\mathrm{tr}_{12}\sigma$ とおくと，〈補題 8.13〉の（1）より，$S(\sigma_3)=S(\rho_{12})$．また，$\rho_1=\mathrm{tr}_{23}\sigma$，$\rho_2=\mathrm{tr}_{13}\sigma$ であるから，$\sigma_{23}=\mathrm{tr}_1\sigma$ とおくと，$S_1\geqq S_2$ の場合は，

$$S(\rho_1)=S(\sigma_{23})\leqq S(\rho_2)+S(\sigma_3)=S(\rho_2)+S(\rho_{12}).$$

すなわち，$S_1-S_2\leqq S_{12}$．$S_1\leqq S_2$ の場合は，全く同様にして $S_2-S_1\leqq S_{12}$．

（2）：第4の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_4$ をとって，Hilbert 空間 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3\otimes\mathcal{H}_4$ 上の純粋状態 σ を $\mathrm{tr}_4\sigma=\rho$，$\mathrm{tr}_{234}\sigma=\rho_1$ となるようにとり，〈補題 8.13〉を使えばよい．▌

強劣加法性の証明　〈N.7〉の（1）と（2）は同等であることがわかったから，ここでは（1）を証明しよう．これは相対エントロピーの単調性（第9章の〈定理 9.23〉）を使うと容易に証明することができる．

まず $S_{123}<\infty$ かつ $S_{12}<\infty$ の場合を考える．このこき，$S(\rho_{123}|\rho_1\otimes\rho_{23})=S_1+S_{23}-S_{123}$ で，これは単調性より $S(\rho_{12}|\rho_1\otimes\rho_2)=S_1+S_2-S_{12}$ より大きいので，$S_1+S_{23}-S_{123}\geqq S_1+S_2-S_{12}$ となる．すなわち，

$$S_{123}+S_2\leqq S_{23}+S_{12} \tag{8.21}$$

となり（1）が証明された．また，$S_{123}<\infty, S_{12}=\infty$ のときは（1）の不等式は自明であるから，$S_{123}=\infty$ のときの証明を考えればよい．今，$\{E_k^{(n)}\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ $(k=1,2,3)$ を I に収束する $\mathscr{H}_k$ 上の有限次元の射影作用素の増大列とする．ここで，

$$\begin{aligned}
E^{(n)}&=E_1^{(n)}\otimes E_2^{(n)}\otimes E_3^{(n)}\\
\rho^{(n)}&=E^{(n)}\rho E^{(n)}\\
E_{ij}^{(n)}&=E_i^{(n)}\otimes E_j^{(n)}\quad (i\neq j=1,2,3)\\
\rho_{ij}^{(n)}&=E_{ij}^{(n)}(\mathrm{tr}_k E_k^{(n)}\rho E_k^{(n)})E_{ij}^{(n)}\\
\rho_k^{(n)}&=E_k^{(n)}(\mathrm{tr}_{ij}E_{ij}^{(n)}\rho E_{ij}^{(n)})E_k^{(n)}
\end{aligned}$$

とおくと，各 $E_k^{(n)}\mathscr{H}_k, E_{ij}^{(n)}\mathscr{H}_i\otimes\mathscr{H}_j, E^{(n)}\mathscr{H}$ は有限次元だから，$S(\rho_k^{(n)})<\infty$, $S(\rho_{ij}^{(n)})<\infty$, $S(\rho^{(n)})<\infty$．したがって，上記の不等式（8.21）より，

$$S(\rho^{(n)})+S(\rho_2^{(n)})\leqq S(\rho_{12}^{(n)})+S(\rho_{23}^{(n)})$$

となる．よって，$\lim_{n\to\infty}S(\rho^{(n)})=S(\rho)$ 等を証明すればよいことになる．そのためには，$\rho^{(n)}$, $\rho_{ij}^{(n)}$, $\rho_k^{(n)}$ が〈定理 8.9〉の条件を満たすことを示せばよい．

まず $\lim S(\rho^{(n)})=S(\rho)$ を示す．$E^{(n)}\uparrow I$ であるから，$\rho^{(n)}\xrightarrow{s}\rho$．よって，$\rho^{(n)}\xrightarrow{w}\rho$．また，$E^{(n)}\leqq E^{(n+1)}$ より $\rho^{(n)}\prec\rho^{(n+1)}\prec\rho$．ゆえに〈定理 8.9〉の条件が満たされたから，$\lim S(\rho^{(n)})=S(\rho)\equiv S_{123}$．

次に，$\lim S(\rho_{ij}^{(n)})=S(\rho_{ij})$ を示す．$\tilde{\rho}_{ij}^{(n)}=\mathrm{tr}_k E_k^{(n)}\rho E_k^{(n)}$ とおく．このとき，定義より $\rho_{ij}^{(n)}=E_{ij}^{(n)}\tilde{\rho}_{ij}^{(n)}E_{ij}^{(n)}$ であるから，"$\rho_{ij}^{(n)}\xrightarrow{w}\rho_{ij}\Longleftrightarrow\tilde{\rho}_{ij}^{(n)}\xrightarrow{s}\rho_{ij}$" である．$E_{ij}^{(n)}\mathscr{H}_i\otimes\mathscr{H}_j$ の CONS を $\{x_l\,;\,l\in\boldsymbol{N}\}$ とすると，

$$\langle y,\tilde{\rho}_{ij}^{(n)}y\rangle=\sum_{l=1}^{n}\langle y\otimes x_l,\rho y\otimes x_l\rangle,\quad \forall y\in\mathscr{H}_k.$$

ゆえに，（i）$\tilde{\rho}_{ij}^{(n)}\leqq\rho_{ij}^{(n)}$ かつ（ii）$\lim_{n\to\infty}\langle y,(\rho_{ij}-\tilde{\rho}_{ij}^{(n)})y\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{n+1}^{\infty}\langle y\otimes x_l,\rho y\otimes x_l\rangle=0$．したがって，$\tilde{\rho}_{ij}^{(n)}\xrightarrow{s}\rho_{ij}$ となるから上記の同値性より，$\rho_{ij}^{(n)}\xrightarrow{w}\rho_{ij}$．さらに，（1）より，$\tilde{\rho}_{ij}^{(n)}\prec E_{ij}^{(n+1)}\tilde{\rho}_{ij}^{(n)}E_{ij}^{(n+1)}\leqq E_{ij}^{(n+1)}\tilde{\rho}_{ij}^{(n+1)}E_{ij}^{(n+1)}=\tilde{\rho}_{ij}^{(n+1)}\prec\rho_{ij}$．以上より，〈定理 8.9〉の条件が満たされたので，$\lim S(\rho_{ij}^{(n)})=S(\rho_{ij})$．

最後の $\lim S(\rho_k^{(n)})=S(\rho_k)$ も同様にして証明される．∎

このように一度相対エントロピーの単調性がわかってしまえば，強劣加法性の証明は容易であるが，歴史的には，この単調性に気付くのが大変であった．単調性は相対エントロピーの凸性から導かれ，凸性は Lieb の凹性定理から証明されていた．しかもこの Lieb の仕事はかなり複雑なものであった．Lieb の仕事は以後 Epstein [E 5] によってかなり簡略化され，さらに次の章で詳細に議論する Uhlmann の研究によって非常に一般的でかつ簡便なものになったのである．

8.4　$S(\rho)$ の特徴付

この節では古典系における Shannon エントロピーの特徴付け定理を下敷にして $S(\rho)$ の特徴付けについて論ずる．

密度作用素の全体 $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ から $\bar{\boldsymbol{R}}^{+}\equiv[0,\infty]$ への系の不確定さを表す写像を以下 Θ で表すことにする．このとき $\Theta(\rho)$ が，いかなる条件の下で，定数倍を除いて $S(\rho)$ に一致するかを調べることがこの節の目標である．

さて，次の仮定は数学的にも物理的にも自然であろう．

(A.1)　**不変性**：任意のユニタリー変換 U に対して，

$$\Theta(U^{*}\rho U)=\Theta(\rho)$$

(A.2)　**拡張可能性**：$\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}'\equiv\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$ に拡張したとき，$\rho'=\rho\oplus 0\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}')_{+,1}$ とおくと，$\Theta(\rho')=\Theta(\rho)$．

(A.3)　$\rho\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H})_{+,1}$ のとき，$\Theta(\rho)<+\infty$．

(A.4)　$\dim\mathcal{H}>1$ のとき $\rho\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H})_{+,1}$ が少なくともひとつ存在して，$\Theta(\rho)>0$．

(A.5)　$\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}\cap\boldsymbol{F}(\mathcal{H})_{+,1}{}^{c}$ のとき，(8.18) の ρ_N に対して，$\Theta(\rho_N)\to\Theta(\rho)$ $(N\to\infty)$．

(A.6)　**連続性**：$\rho\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H})_{+,1}$ に対して，$\Theta(\rho)$ は ρ の固有値 $\{\lambda_j\}$ に関する連続函数．

(A.8)　**加法性**：$\rho_k\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H}_k)_{+,1}$ $(k=1,2)$ に対して，

$$\Theta(\rho_1\otimes\rho_2)=\Theta(\rho_1)+\Theta(\rho_2).$$

(A.8)　**劣加法性**：$\rho\in\boldsymbol{F}(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2)_{+,1}$，$\rho_k\equiv\mathrm{tr}_j\rho$ $(k\neq j=1,2)$ に対して，$\Theta(\rho)\leqq\Theta(\rho_1)+\Theta(\rho_2)$.

まず，〈定理 1.3〉と類似の特徴付けとして

〈定理 8.15〉　上記の仮定 (A.1)〜(A.6) を満たす Θ が，さらに，条件 (A')：$\mathscr{H}=\bigoplus_{k=1}^{n}\mathscr{H}_k$ で $\rho=\bigoplus_{k=1}^{n}\lambda_k\rho_k$ $(\lambda_k\geqq 0,\ \sum\lambda_k=1,\ \rho_k\in\boldsymbol{T}(\mathscr{H})_{+,1})$ に対して，$\Theta(\rho)=\sum\lambda_k\Theta(\rho_k)+\Theta(D)$（ただし，$D$ は対角行列 $(\lambda_k\delta_{kj})$）を満たすならば，任意の $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathscr{H})_{+,1}$ に対して

$$\Theta(\rho)=\mathrm{const}\cdot S(\rho)$$

となる.

証明　この定理の証明は基本的には第1章の〈定理 1.3〉のそれと同様である．まず，(A.5) より $\dim\mathscr{H}<\infty$ としても一般性を失わない．また，(A.1) と条件 (A′) より，$\{\lambda_k\}$ を ρ の固有値とし，$\Theta(\rho)=\Theta_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ と $\Theta(\rho)$ を $\{\lambda_k\}$ の函数とみなすと，これは λ_k の置換に関して不変である．さらに，(A′) を使って少々計算すると，$\lambda_{n-1}+\lambda_n\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\Theta_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=&\Theta_{n-1}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-2},\lambda_{n-1}+\lambda_n)\\&+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)\Theta_2(\lambda_{n-1}/(\lambda_{n-1}+\lambda_n),\lambda_n/(\lambda_{n-1}+\lambda_n))\end{aligned}$$

が成立する．したがって，他の条件 (A.2)，(A.3)，(A.4)，(A.6) より $\Theta_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に〈定理 1.3〉が適用でき，

$$\Theta_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\mathrm{const}\cdot\left(-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\log\lambda_k\right)$$

となる．よって $\Theta(\rho)=\mathrm{const}\cdot S(\rho)$. ∎

第1章では述べなかったが，Shannon–Khinchin–Faddeev 流の特徴付け以外に，次の Aczel–Forte–Ng [A 2] 流の特徴付けがある.

A·F·N の $S(p)$ の特徴付：$S:\bigcup_{n\geqq 1}\Delta_n\to\bar{\boldsymbol{R}}^+$ が条件〈S.4〉〜〈S.7〉（第1章 §4 参照）を満たすとき，$S\neq 0$ であれば，$p=\{p_k\}$ に対して，

$$S(p)=\mathrm{const}\cdot(-\sum p_k\log p_k)+\mathrm{const}'\cdot\log N.$$

ここで，N は $p_k\neq 0$ である p_k の個数である．さらに，S が〈S.2〉を満た

せば，$S(p)=\mathrm{const}\cdot(-\sum p_k\log p_k)$ となる．

これの量子力学版は次のように書かれる．

〈定理 8.16〉 $\Theta:\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}\to\bar{\boldsymbol{R}}^+$ が (A.1)～(A.5), (A.7), (A.8) を満たせば，$\Theta(\rho)=\mathrm{const}\cdot S(\rho)+\mathrm{const}'\cdot\log N$. ここで，$N$ は ρ の 0 以外の固有値の個数である．さらに，Θ が (A.6) も満たせば，$\Theta(\rho)=\mathrm{const}\cdot S(\rho)$ となる．

この定理と上の AFK 特徴付けに関しては文献 [A 2, O 1, W 3] を参照．

8.5 $S(\rho)$ の拡張

無限の自由度を有する様々な物理系の力学的な振舞いを定性的に論ずるためには C* 代数による記述が有用である [B 7, E 3, E 6, O 8]. そこで，この節では，von Neumann エントロピー $S(\rho)$ をその特殊な場合として含む C* 力学系の状態 φ のエントロピー $S(\varphi)$ を導入し，その性質を調べる．

この節の議論には，C* 代数と状態及びその分解に関する知識が必要である．これらは付章2，3.1 項，4.6 項にまとめてある．

$\mathcal{A}$ を単位元 I を含む C* 代数，$\mathfrak{S}$ を $\mathcal{A}$ 上の状態の全体，$\alpha(\boldsymbol{R})$ を強連続な一径数自己同型群とする（付章 2.5 項）．以上の 3 つ組 $(\mathcal{A},\mathfrak{S},\alpha(\boldsymbol{R}))$ を **C* 力学系**とよび，ほとんどの物理系はこの 3 つ組で記述することができる．なお，以下状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対する GNS 表現を $\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi\}$ で表すことにする．

いま，$\mathcal{S}$ を弱＊コンパクトかつ凸な $\mathfrak{S}$ の部分集合とし，$\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ の端点（すなわち $\mathcal{S}$ の点の凸結合として表せない点）の集合とすると，Krein-Milman の定理（付章 1.7 項）より $\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ の凸包の弱＊位相による閉包が $\mathcal{S}$ に等しい：$\mathcal{S}={}^{w^*}\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$. 以下，我々はこの $\mathcal{S}$ として次のものを考える：（1）$\mathcal{S}=\mathfrak{S}$；（2）$\mathcal{S}=I(\alpha)$（α-不変な状態の全体）；（3）$\mathcal{S}=K_\beta(\alpha)$（ある定数 β で，α に関して KMS 条件（付章 3.1 項）を満たす状態の全体）．

ところで，任意の状態 $\varphi\in\mathcal{S}$ に対して，$\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ を準台としてもつ $\mathcal{S}$ 上の正

則な極大 Borel 測度μが存在して

$$\varphi=\int_{(\mathrm{ex}\,\mathcal{S})}\omega d\mu(\omega) \tag{8.22}$$

と表せる（付章 4.6 項の〈定理 4.33〉）．このような測度は一意であるとは限らず，その一意性は $\mathcal{S}$ が Choquet 単体になる場合にのみ成立する（付章 4.6 項の〈定理 4.34〉）．さらに，(8.21) の測度 μ が高々可算個の台をもつ場合，(8.21) は $\sum\lambda_k=1$ となる $\lambda_k>0$ と $\{\varphi_k\}\subset\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ が存在して

$$\varphi=\sum\lambda_k\varphi_k \tag{8.23}$$

と表せる．このような測度μの全体を $D_\varphi(\mathcal{S})$ で表すことにする．

さて，集合 $\mathcal{S}$ に関する**状態 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{S}$ のエントロピー $\boldsymbol{S^{\mathcal{S}}(\varphi)}$** を次のように定める．

$$S^{\mathcal{S}}(\varphi)\equiv\begin{cases}\inf\{-\sum\lambda_k\log\lambda_k\ ;\ \mu=\{\lambda_k\}\in D_\varphi(\mathcal{S})\}\\ +\infty \qquad (\mu\notin D_\varphi(\mathcal{S})\ \text{のとき})\end{cases}$$

なお，この定義で $\mu\notin D_\varphi(\mathcal{S})$ の場合，$S^{\mathcal{S}}(\varphi)=+\infty$ としたのはφが非可算個の状態が混り合ったものであれば，φの $\mathcal{S}$ における混り具合，すなわち，$\mathcal{S}$ における不確定さは当然 ∞ だと見なせるからである．さらに，我々のエントロピー $S^{\mathcal{S}}(\varphi)$ は $\mathcal{S}$ に依存していることに注意する必要がある．すなわち，どのような基準から状態のもつ“あいまいさ”あるいは“不確定さ”を計るかを考慮に入れているのである．本節では $\mathcal{S}$ として3つの場合（1）$\mathcal{S}=\mathfrak{S}$，（2）$\mathcal{S}=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\alpha})$，（3）$\mathcal{S}=K_\beta(\boldsymbol{\alpha})$ を考えるが，このそれぞれに関して $S^{\mathcal{S}}(\varphi)$ は一般に異なっている．以下，これらのエントロピー $S^{\mathfrak{S}}(\varphi)$（簡単のため，$S(\varphi)$ と略），$S^{I(\alpha)}(\varphi)$, $S^{K(\alpha)}(\varphi)$ の性質とそれらの相互関係を論ずる．

ところで，現実の物理系の乱雑さはどんなに大きくても有限であると考えられるから，$\mathcal{S}$ の部分集合 $\mathcal{S}_{\mathrm{real}}$（$\mathcal{S}_r$ と略）を

$$\mathcal{S}_r=\{\varphi\in\mathcal{S}\ ;\ S^{\mathcal{S}}(\varphi)<+\infty\}$$

と定義する．また，分解 (8.21) を与えるひとつの測度が高々可算個の台をもつ状態の全体を $\mathcal{S}_d(\subset\mathcal{S})$ とする．このとき，当然 $\mathcal{S}_r\subset\mathcal{S}_d$ であり，$\mathcal{S}={}^{w^*}\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$（$\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ の弱＊位相による閉包）であるから，次の補題が成立する．

〈**補題 8.16**〉 $\bar{\mathcal{S}}_r^{\,w^*}=\mathcal{S}$.

さて，ここで導入したエントロピーが実際 v. N. エントロピーの拡張になっていることを示そう．いま，可分な複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素の全体 $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ と恒等作用系 I より生成される C^* 代数を $\tilde{\boldsymbol{C}}(\mathcal{H})$ とする：$\tilde{\boldsymbol{C}}(\mathcal{H})=\boldsymbol{C}(\mathcal{H})+\boldsymbol{C}I$.

〈**定理 8.17**〉 $\mathcal{A}=\tilde{\boldsymbol{C}}(\mathcal{H})$ で α_t がユニタリー作用素 U_t を使って，$\alpha_t(\cdot)=U_t\cdot U_{-t}$ で与えられ，状態 φ が $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ を使って，$\varphi(A)=\mathrm{tr}\,\rho A$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ と表せるとき；

（1） $S(\varphi)=-\mathrm{tr}\,\rho\log\rho$；

（2） さらに，この φ が忠実な α-不変状態であり，ρ の固有値が非縮退であれば，$S^{I(\alpha)}(\varphi)=S(\varphi)$；

（3） $\varphi\in K_\beta(\alpha)$ であれば，$S^{K(\alpha)}(\varphi)=0$.

証明 （1）：$\rho=\sum\lambda_k\rho_k$ を ρ の純粋状態 ρ_k(i. e., $\rho_k{}^2=\rho_k$, $\forall k$) へのひとつの分解とする．このとき，$\varphi_k(A)=\mathrm{tr}\,\rho_k A$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ とおくと，$\varphi=\sum\lambda_k\varphi_k$ は φ の端点分解である．また，$\varphi\in\mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$ のとき，ρ は純粋状態 (i. e., $\rho^2=\rho$) である．したがって，33 頁の (8.13) より，

$$S(\varphi)=\inf\{-\sum_k\lambda_k\log\lambda_k\}=S(\rho).$$

（2）：$\varphi\in I(\alpha)$ だから，任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して，$[U_t,\rho]=0$. また，φ は忠実だから，$\rho>0$ であり，さらに，ρ の固有値が非縮退であることから，x_k を ρ の任意の固有ベクトルとし $\rho_k=|x_k\rangle\langle x_k|$ とおくと，任意の $t\in\boldsymbol{R}$ と k に対して，$[U_t,\rho_k]=0$ となる．ゆえに，$\rho_k\in I(\alpha)$ となり，よって，$S(\varphi)\geqq S^{I(\alpha)}(\varphi)$. 逆向きの不等式を示す．$\varphi=\sum\lambda_n\varphi_n$ をエルゴード分解 (i. e., $\varphi_k\in\mathrm{ex}\,I(\alpha)$) とし，$\varphi_k$ に対応する密度作用素を ρ_k とする．このとき，ρ_k は純粋状態になる．したがって，$\varphi_k\in\mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$ である．ゆえに，$S(\varphi)\leqq S^{I(\alpha)}(\varphi)$.

（3）：$\mathcal{A}=\tilde{\boldsymbol{C}}(\mathcal{H})$ のとき，KMS 状態は一意である（付章 3.1 項）．した

がって，$\varphi\in K_\beta(\alpha)$ ならば，$S^{K(\alpha)}(\varphi)=0$. ▮

さて，$S^S(\varphi)$ の一般論にもどろう．まず，$S(\varphi), S^{I(\alpha)}(\varphi), S^{K(\alpha)}(\varphi)$ の関連を調べる．

〈定理 8.18〉 任意の KMS 状態 $\varphi\in K_\beta(\alpha)$ において，次が成立する．

（1） $S^{I(\alpha)}(\varphi)\geqq S^{K(\alpha)}(\varphi)$.

（2） $S(\varphi)\geqq S^{I(\alpha)}(\varphi)$.

（3） $(\mathcal{A},\alpha(\boldsymbol{R}))$ が φ において G-可換（付章 4.6 項）であるとき，$S(\varphi)\geqq S^{I(\alpha)}(\varphi)\geqq S^{K(\alpha)}(\varphi)$.

（4） $(\mathcal{A},\alpha(\boldsymbol{R}))$ が φ において η-可換

$$\left(\text{i.e., } \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\varphi(C^*[\alpha_t(A),B]C)=0,\quad \forall A,B,C\in\mathcal{A}\right)$$

であるとき，$S^{I(\alpha)}(\varphi)=S^{K(\alpha)}(\varphi)$.

証明 $\mathcal{S}$ が $\mathfrak{S}, I(\alpha), K_\beta(\alpha)$ のどの場合でも，状態 φ が $\mathcal{S}_d$ に属していなければ，$S^S(\varphi)=\infty$ であるから，$\varphi\in\mathcal{S}_d$ の場合に命題を証明すれば十分である．このことは以下の諸性質の証明でも同様である．

（1）: $\varphi\in K_\beta(\alpha)_d$ の $\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)$ への分解は一意である（付章 4.6 項の〈定理 4.40〉）．これを $\varphi=\sum\lambda_n\varphi_n$ とおく．さらに，この端点 $\{\varphi_n\}$ は互いに直交している：$\varphi_n\perp\varphi_m$ $(n\neq m)$．ところで，$\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)\subset I(\alpha)$ であるから，各 φ_n はさらに $\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ の元，すなわち，エルゴード状態へ分解できる．このエルゴード分解を $\varphi_n=\sum_k\mu_k{}^n\psi_k$, $\psi_k\in\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ とおくと

$$S^{I(\alpha)}(\varphi)=\inf\{-\sum_{k,n}\lambda_n\mu_k{}^n\log\lambda_n\mu_k{}^n\,;\,\{\mu_k{}^n\}\}$$
$$=\sum\lambda_n S^{I(\alpha)}(\varphi_n)+S^{K(\alpha)}(\varphi)\geqq S^{K(\alpha)}(\varphi).$$

（2）は（1）と同様に証明でき，（3）の第 2 の不等式は $(\mathcal{A},\alpha(\boldsymbol{R}))$ が φ において G-可換であることから φ のエルゴード分解が一意となることに基づいている．最後に，（4）は η-可換性から $\mathrm{ex}\,K(\alpha)\subset\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ が結論されることによっている．▮

エントロピー $S^S(\varphi)$ は定義より当然正値性を有しており，“$S^S(\varphi)=0\Longleftrightarrow$

$\varphi \in \mathrm{ex}\,\mathcal{S}$" である．

〈1〉 **正値性**：$S^{\mathcal{S}}(\varphi) \geqq 0$.

ξ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への＊同型写像とし，ξ の共役写像 ξ^* が $\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ から $\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ への写像とする．このとき $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して，$\varphi' = \xi^*(\varphi)$ とおくと

〈2〉 **不変性**：$S^{\mathcal{S}}(\varphi') = S^{\mathcal{S}}(\varphi)$.

$S^{\mathcal{S}}(\varphi)$ の凹性については次の結果が成立する．

〈3〉 **凹性**：2つの状態 $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$ と実数 $\lambda \in [0,1]$ 対して，$\omega = \lambda\varphi + (1-\lambda)\psi$ とおく．このとき，次が成立．

（1） $S(\omega) \geqq \lambda S(\varphi) + (1-\lambda) S(\psi)$.

（2） $\varphi, \psi \in K_\beta(\alpha)$ であれば，$S^{K(\alpha)}(\omega) \geqq \lambda S^{K(\alpha)}(\varphi) + (1-\lambda) S^{K(\alpha)}(\psi)$，かつ $S^{I(\alpha)}(\omega) \geqq \lambda S^{I(\alpha)}(\varphi) + (1-\lambda) S^{I(\alpha)}(\psi)$.

（3） $\varphi, \psi \in I(\alpha)$ であり，さらに，（i）中心 $\mathcal{Z}_\varphi$ および $\mathcal{Z}_\psi$ の元が $\tilde{\alpha}_t$ (p. 168) の下で不変，あるいは，（ii）$(\mathcal{A}, \alpha(\boldsymbol{R}))$ が φ および ψ において G-可換であるとき，$S^{I(\alpha)}(\omega) \geqq \lambda S^{I(\alpha)}(\varphi) + (1-\lambda) S^{I(\alpha)}(\psi)$.

このように，$S^{I(\alpha)}(\varphi)$ の凹性は無条件では成立しないようである．

最後に，加法性について見ておこう．いま，2つの C* 力学系 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}(A), \alpha(\boldsymbol{R}))$，$((\mathcal{B}, \mathfrak{S}(\mathcal{B}), \tau(\boldsymbol{R}))$ において，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の C* テンソル積（付章 2.10 項）を $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ とおき，$\mathcal{C}$ の自由な自己同型一径数群を $\gamma_t = \alpha_t \otimes \tau_t (\forall t \in \boldsymbol{R})$ とおく．さらに，$\varphi \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}), \psi \in \mathfrak{S}(\mathcal{B})$ に対して，φ と ψ よりつくられた自明な合成状態を $\varphi \otimes \psi$ で表す（i. e., $\varphi \otimes \psi(A \otimes B) \equiv \varphi(A)\psi(B)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}$ で定められた $\mathcal{C}$ 上の状態）．

〈4〉 **加法性**：$\mathcal{S}(\gamma)$ のすべての状態の端点分解が一意であるとき，

$$S^{\mathcal{S}(\gamma)}(\varphi\otimes\psi)=S^{\mathcal{S}(\alpha)}(\varphi)+S^{\mathcal{S}(\tau)}(\psi).$$

この条件が成立する例を上げる：(1) $(K_\beta(\alpha), K_\beta(\tau), K_\beta(\gamma))$ に対しては自動的に成立．(2) $(I(\alpha), I(\tau), I(\gamma))$ で $(\mathcal{C}, \gamma(\boldsymbol{R}))$ が G-可換なとき成立．

〈3〉,〈4〉の証明は Ohya [O 4] を参照されたい．ここで簡単に論じたように，$S^{\mathcal{S}}(\varphi)$ のある性質は $S(\rho)$ の場合と異なり，無条件で成立することはなさそうである．よって，より弱い十分条件を求めること，とくに，連続性，劣加法性および強劣加法性が成立するための条件を求めることは残された問題である．

第9章　相対エントロピーと WYDLU 凹性

第8章で述べたように量子論的相対エントロピーは，Umegaki によって Kullback-Leibler 情報量の非可換系への拡張として，半有限かつ σ-有限な von Neumann 代数に対して導入され，その後，相対エントロピーの性質とその応用は Lindblad, Lieb, Araki 等によって研究されてきた．とくに，Araki は Umegaki の相対エントロピーを一般の von Neumann 代数上へ拡張し，格子系の平衡状態の研究に適用した．この Araki の定式化は十分一般的なものであり，相対エントロピーの単調性に関する問題を除けばほぼ完全なものであったが，9.3 節で議論するように Araki の定式化は Tomita-Takesaki 理論（付章 3.2 項）に依存してやや難解であった．一方 Uhlmann は補間理論を発展させ，$*$代数上で相対エントロピーを定義し，その主要な性質（連続性を除く）を非常に簡単な計算により導き出した．Uhlmann の仕事の重要さは，一般化・抽象化にあるのではなく，Wigner-Yanase-Dyson-Lieb (WYDL) 凹性に関する Lieb の難解な証明を簡明なものにした点や，相対エントロピーの単調性を完全に証明したことにある．

この章では，まず補間理論の証明から始め（9.1 節），9.2 節で，相対エントロピーの Uhlmann 定式化に言及し，相対エントロピーの諸性質を論ずる．9.3 節では Araki の定式化の下で相対エントロピーの連続性を調べる．最後の節（9.4 節）で Umegaki, Hiai-Ohya-Tsukada 等によって調べられた量子系における十分性の概念とそれによる平衡状態の特徴化に言及し，この概念と相対エントロピーの係わりについて論ずる．

9.1　補間理論

この節のほとんどの結果は文献［P 7］及び［U 2］による．

$\mathcal{L}$ を複素線形空間，p, q を $\mathcal{L}$ 上の半ノルムとし，任意の $x, y \in \mathcal{L}$ に対して，$|\alpha(x, y)| \leqq p(x)q(y)$ を満たす正の Hermite 形式 α の集合を $\mathcal{S}$ とする．この $\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}(p, q)$ と書くこともある．いま，$\mathrm{QM}(p, q)(x) = \sup\{\alpha(x, x)^{1/2}; \alpha \in \mathcal{S}(p, q)\}$ とおき，この QM を $\mathcal{L}$ 上の**2次平均** (quadratic mean) という．以下，しばらく $\mathrm{QM}(p, q)$ に関するいくつかの補題を証明する．

〈補題 9.1〉 任意の $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}^+$ と $x \in \mathcal{L}$ に対して，(1) $\mathrm{QM}(p, q) = \mathrm{QM}(q, p)$；(2) $\mathrm{QM}(\lambda^2 p, \mu^2 q) = \lambda\mu\,\mathrm{QM}(p, q)$；(3) $\mathrm{QM}(p, q)^2(x) \leqq p(x)q(x)$；(4) $\mathrm{QM}(p, p) = p$.

証明 (1)，(2)，(3) は定義より明らかだから，(4) を証明する．f を $\mathcal{L}$ 上の線形形式で，$|f| \leqq p$ となるものとする．このとき，$\alpha_f(x, y) = \overline{f(x)}f(y)$ $(\forall x, y \in \mathcal{L})$ とおくと，これは $\mathcal{L}$ 上のエルミート形式になるから，$\alpha_f \in \mathcal{S}$. したがって Hahn–Banach 拡張定理 (付章 1.5 参照) を用いて $p \leqq \mathrm{QM}(p, p)$. 逆に (3) より，$\mathrm{QM}(p, p)^2(x) \leqq p(x)^2$ であるから，$\mathrm{QM}(p, p) \leqq p$. ゆえに，(4) が成立．▮

〈補題 9.2〉 $\mathcal{L}_0$ を $\mathcal{L}$ の部分空間とし，$p_0 = p \restriction \mathcal{L}_0$ (すなわち，p の $\mathcal{L}_0$ への制限)，$q_0 = q \restriction \mathcal{L}_0$ とすると，

$$\mathrm{QM}(p_0, q_0)(x) \geqq \mathrm{QM}(p, q)(x), \quad \forall x \in \mathcal{L}_0.$$

証明 $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ であるから，$\mathcal{L}_0$ に対する $\mathcal{S}_0$ を $\mathcal{S}$ と同様に定めると，$\mathcal{S} \restriction \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{S}_0$ となる．このことより補題は明らか．▮

函数 $\phi : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ が $|\xi_i| \leqq |\eta_i|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を満足する $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$，$\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，$\phi(\eta) \leqq \phi(\xi)$ であるとき，ϕ は**単調**であるという．なお，ϕ が $\boldsymbol{R}^n$ 上の単調半ノルムであり，かつ $p_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ が $\mathcal{L}$ 上の半ノルムであれば，$\phi(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ も $\mathcal{L}$ 上の半ノルムとなる．

〈定理 9.3〉 $p_k, q_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ を $\mathcal{L}$ 上の半ノルム，ϕ, ψ を $\boldsymbol{R}^n$ 上の単調半ノルムで任意の $\xi, \eta \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，$\phi(\xi)\psi(\eta) \geqq \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\right|$ を満たすも

のとする．さらに，$\mathcal{L}$ 上の他の半ノルム p, q が $p \geqq \phi(p_1, \cdots, p_n)$，$q \geqq \psi(q_1, \cdots, q_n)$ を満たすとき，$\mathrm{QM}(p, q)^2 \geqq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{QM}(p_i, q_i)^2$ が成立する．

証明　任意の $x, y \in \mathcal{L}$ に対して，$\xi_i = p_i(x), \eta_i = q_i(y)$ とおき，

$$\mathcal{S}_i = \{\text{正の Hermite 形式 } \alpha_i \, ; \, |\alpha_i(x, y)| \leqq p_i(x) q_i(y)\}$$

とする．条件より，$\phi(\xi)\psi(\eta) \geqq \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\right|$ かつ，$p \geqq \phi(p_1, \cdots, p_n)$, $q \geqq \psi(q_1, \cdots, q_n)$ だから，

$$p(x) q(y) \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i(x) q_i(y) \geqq \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x, y)\right|.$$

ゆえに，"QM" の定義より

$$\mathrm{QM}(p, q)^2(x) \geqq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{QM}(p_i, q_i)^2(x). \blacksquare$$

〈**系 9.4**〉　p, p_k, q, q_k $(k=1, 2)$ を $\mathcal{L}$ 上の半ノルムとし，$p^2 \geqq \lambda_1 p_1{}^2 + \lambda_2 p_2{}^2$，$q^2 \geqq \lambda_1 q_1{}^2 + \lambda_2 q_2{}^2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}^+)$ とすると，

$$\mathrm{QM}(p, q)^2 \geqq \lambda_1 \mathrm{QM}(p_1, q_1)^2 + \lambda_2 \mathrm{QM}(p_2, q_2)^2.$$

証明　$\phi(\xi) = \sqrt{\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2}$，$\psi(\eta) = \sqrt{\eta_1{}^2 + \eta_2{}^2}$ とおくと，$\phi(\xi)\psi(\eta) \geqq |\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2|$．条件より $p \geqq \phi(\sqrt{\lambda_1} p_1, \sqrt{\lambda_2} p_2)$, $q \geqq \psi(\sqrt{\lambda_1} q_1 + \sqrt{\lambda_2} q_2)$ となるから，〈定理 9.3〉より

$$\begin{aligned} \mathrm{QM}(p, q)^2 &\geqq \mathrm{QM}(\sqrt{\lambda_1} p_1, \sqrt{\lambda_1} q_1)^2 + \mathrm{QM}(\sqrt{\lambda_2} p_2, \sqrt{\lambda_2} q_2)^2 \\ &= \lambda_1 \mathrm{QM}(p_1, q_1)^2 + \lambda_2 \mathrm{QM}(p_2, q_2)^2. \blacksquare \end{aligned}$$

〈**補題 9.5**〉　$AB = BA$ である $A, B \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})_+$ に対して，$p(x) = \langle x, Ax \rangle^{1/2}$，$q(x) = \langle x, Bx \rangle^{1/2}$ とおくと，任意の $x \in \mathcal{H}$ において，

$$\mathrm{QM}(p, q)(x) = \langle x, A^{1/2} B^{1/2} x \rangle^{1/2}. \tag{9.1}$$

証明　$\beta(x, y) = \langle x, A^{1/2} B^{1/2} y \rangle$ $(\forall x, y \in \mathcal{H})$ とおくと Schwarz の不等式より $|\beta(x, y)| \leqq p(x) q(y)$．したがって，任意の $\alpha \in \mathcal{S}(p, q)$ に対して，$\alpha(x, x) \leqq \beta(x, x)$ を示せばよい．任意の $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して，$\mathcal{S}$ の定義より

$$|\alpha(x, y)|^2 \leqq p(x)^2 q(y)^2 \leqq \|A\| \|B\| \|x\|^2 \|y\|^2.$$

ゆえに，Riesz の定理より，$C\in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在して

$$\alpha(x,y)=\langle x, Cy\rangle$$

となる．ここで，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$A_\varepsilon=A+\varepsilon I$, $B_\varepsilon=B+\varepsilon I$ とおくと，$A_\varepsilon^{-1}, B_\varepsilon^{-1}$ が存在する．いま，不等式 $|\langle x, Cy\rangle|\leqq\langle x, Ax\rangle^{1/2}\langle y, By\rangle^{1/2}$ の x に $A_\varepsilon^{-1/2}x$ を，y に $B_\varepsilon^{-1/2}y$ を入れると，$|\langle A_\varepsilon^{-1/2}x, CB_\varepsilon^{-1/2}y\rangle|\leqq\|x\|\cdot\|y\|$ ($\forall x,y\in\mathcal{H}$) となるから，$\|A_\varepsilon^{-1/2}CB_\varepsilon^{-1/2}\|\leqq 1$. したがって，

$$B_\varepsilon^{-1/2}CA_\varepsilon^{-1}CB_\varepsilon^{-1/2}\leqq I.$$

両辺に $A_\varepsilon^{-1/2}B_\varepsilon^{1/2}$ を左右両側から掛けると $AB=BA$ より

$$(A_\varepsilon^{-1/2}CA_\varepsilon^{-1/2})^2\leqq A_\varepsilon^{-1}B_\varepsilon.$$

よって，$A_\varepsilon^{-1/2}CA_\varepsilon^{-1/2}\leqq A_\varepsilon^{-1/2}B_\varepsilon^{1/2}$ となるから，$C\leqq A_\varepsilon^{1/2}B_\varepsilon^{1/2}$. ここで $\varepsilon\to 0$ ととると，$C\leqq A^{1/2}B^{1/2}$. ゆえに，$\alpha(x,x)=\langle x, Cx\rangle\leqq\langle x, A^{1/2}B^{1/2}x\rangle=\beta(x,x)$. ∎

〈定理 9.6〉 Wigner-Yanase 凹性：任意の $X\in \boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ に対して，$f(A, B)=\mathrm{tr}(X^*A^{1/2}XB^{1/2})$, $A,B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})_+$ とおくと，f は A,B に関して同時凹函数である．

証明 $\mathcal{L}=\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ において，$《X, Y》=\mathrm{tr}\,X^*Y$ ($\forall X, Y\in\mathcal{L}$) とおくと，$\mathcal{L}$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアル（付章 1.3 項参照）であるから，任意の $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，$《AX, Y》=《X, A^*Y》$ が成立．$A,B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})_+$ に対して，$p(X)=《X, AX》^{1/2}$, $q(X)=《X, XB》^{1/2}$ とおくと，p, q は $\mathcal{L}$ 上の半ノルムとなる．また，左，右正則表現（付章 2.1 項参照）π, π' を使うと，$AX=\pi(A)X$, $XB=\pi'(B)X$ と書けるので，$p(X)=《X, \pi(A)X》^{1/2}$, $q(X)=《X, \pi'(B)X》^{1/2}$ で $\pi(A)\pi'(B)=\pi'(B)\pi(A)$. ゆえに，〈補題 9.5〉より任意の $X\in\mathcal{L}$ に対して，

$$\mathrm{QM}(p,q)(X)=《X, \pi(A)^{1/2}\pi'(B)^{1/2}X》^{1/2}=(\mathrm{tr}\,X^*A^{1/2}XB^{1/2})^{1/2}.$$

よって，〈系 9.4〉より $f(A,B)=\mathrm{tr}X^*A^{1/2}XB^{1/2}$ は同時凹函数である．∎

以上の証明において，〈補題 9.5〉が基本的であるが，この補題は Pusz と Woronowicz [P 7] による．なお，上の定理は $p(X)$, $q(X)$ が定義できる X, A, B に関してはどのようなものでも成立することを断っておこう．たとえ

ば，$A, B \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ ならば，$X=I$ でもよい．

ある $t', t'' \in \bar{\boldsymbol{R}}(t'<t'')$ に関して，$t \in [t', t'']$ から $\mathcal{L}$ 上の半ノルム p_t への写像 $t \mapsto p_t$ が $\mathcal{L}$ 上の**2次スケール** (quadratical scale) であるとは

(**Q. S. 1**) 任意の $x \in \mathcal{L}$ に対して，$t \mapsto p_t(x)$ が連続；

(**Q. S. 2**) 任意の $t_1, t_2 \in [t', t''], t=(t_1+t_2)/2$ に対して, $p_t = \mathrm{QM}(p_{t_1}, p_{t_2})$;

を満たすものをいう．

また，$\mathcal{L}$ 上の2つの半ノルム p', p'' に関して，p' から p'' への**2次補間** (quadratical interpolation) とは $[0,1]$ 上の2次スケール p_t で次の性質をもつものをいう．

(**Q. I. 1**) $p_{1/2} = \mathrm{QM}(p', p'')$.

(**Q. I. 2**) $p_{t/2} = \mathrm{QM}(p', p_t)$, $\forall t \in [0,1]$.

(**Q. I. 3**) $p_{(1+t)/2} = \mathrm{QM}(p'', p_t)$, $\forall t \in [0,1]$.

〈補題 9.7〉 任意の半ノルム p', p'' に関して，p' から p'' への2次補間は存在すれば一意である．

証明 2つの2次補間が存在したとして，T を p' から p'' へのこの2つの2次補間が一致する実数 $t \in [0,1]$ の集合とする．このとき，$T=[0,1]$ を示せばよい．2次スケール p_t の連続性より T は閉集合である．また，(Q. I. 1) から $1/2 \in T$．(Q. I. 2) と (Q. I. 3) より $t \in T$ ならば $t/2 \in T$ かつ $(1+t)/2 \in T$ となる．したがって $1/2 \in T$ であるから $1/2^n \in T$ ($\forall n \in \boldsymbol{N}$) となり，ここで $n \to \infty$ ととると T が閉集合であることから $0 \in T$ がわかる．同様に，$t \in T \Rightarrow (1+t)/2 \in T$ より，$1 \in T$ がわかる．さらに，$t_1, t_2 \in T$ のとき，(Q. S. 2) より $(t_1+t_2)/2 \in T$．ゆえに，T は閉集合だから，T は凸集合になる．したがって，$0, 1 \in T$ であったから，$T=[0,1]$． ▮

この補題の証明のように，ある集合 T が $[0,1]$ に一致することによって命題を証明する方法は以下の定理においても繰り返し採用される．

2次補間が存在する場合，それを $p_t = \mathrm{QI}_t(p', p'')$ で表す．

〈補題 9.8〉 与えられた $x\in\mathcal{L}$ に対して，ある $t_0\in[0,1]$ で $\mathrm{QI}_{t_0}(p',p'')(x)=0$ であれば，すべての $t\in[0,1]$ において，$\mathrm{QI}_t(p',p'')(x)=0$ である．

証明 $T=\{t\in\boldsymbol{R}\,;\,\mathrm{QI}_t(p',p'')(x)=0\}$ とおくと，T は閉集合である．また，$\mathrm{QM}(p,q)^2(x)\leqq p(x)q(x)$ より

$$p_{t_0/2}(x)=\mathrm{QM}(p_{t_0},p')(x)\leqq p_{t_0}(x)^{1/2}p'(x)^{1/2}=0.$$

ゆえに，$t_0/2$，$(t_0+1)/2\in T$．このことより，$0,1\in T$．さらに，$t_1,t_2\in T$ のとき $(t_1+t_2)/2\in T$ となるから T は凸集合である．したがって $T=[0,1]$．▮

〈補題 9.9〉 $p_t=\mathrm{QI}_t(p',p'')$ と $t_k,s_k,t\in[0,1]$ $(k=1,2,\cdots,m)$ に関して，$\sum_{k=1}^m s_k=1$ であれば，

$$p_{(s_1t_1+\cdots+s_mt_m)}\leqq\prod_{k=1}^m(p_{t_k})^{s_k}\quad かつ\quad p_t\leqq(p')^{1-t}(p'')^t.$$

証明 〈補題 9.8〉より $p_t\neq0$ としてよい．$f(t)=\log p_t(x)$ とおくと，p_t の連続性より $f(t)$ も連続になる．また，

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}(t_1+t_2)\right)&=\log p_{(t_1+t_2)/2}(x)\\&=\log\mathrm{QM}(p_{t_1},p_{t_2})(x)\leqq\log(p_{t_1}(x)p_{t_2}(x))^{1/2}\\&=\frac{1}{2}f(t_1)+\frac{1}{2}f(t_2)\end{aligned}$$

となるから，$f(t)$ は凸函数である．したがって，Jensen の不等式より $f\left(\sum_{k=1}^m s_kt_k\right)\leqq\sum_{k=1}^m s_kf(t_k)$．すなわち，$\log p_{\Sigma s_kt_k}(x)\leqq\sum s_k\log p_{t_k}(x)=\log\prod_k p_{t_k}(x)^{s_k}$．ゆえに，

$$p_{\Sigma s_kt_k}(x)\leqq\prod p_{t_k}(x)^{s_k}.$$

次に，$T=\{t\in\boldsymbol{R}\,;\,p_t\leqq(p')^{1-t}(p'')^t\}$ とおくと，これは閉集合．$p_0(x)=\mathrm{QM}(p',p_0)(x)\leqq p'(x)^{1/2}p_0(x)^{1/2}$ であるから，$p_0(x)\leqq p'(x)$ $(\forall x\in\mathcal{L})$．したがって $0\in T$．また，$p_1(x)=\mathrm{QM}(p'',p_1)(x)\leqq p''(x)^{1/2}p_1(x)^{1/2}$ より $p_1(x)\leqq p''(x)$ $(\forall x\in\mathcal{L})$ となるから，$1\in T$．さらに，$t_1,t_2\in T$ のとき，$p_{(t_1+t_2)/2}(x)$

$=\mathrm{QM}(p_{t_1}, p_{t_2})(x) \leqq p_{t_1}(x)^{1/2} p_{t_2}(x)^{1/2} \leqq p'(x)^{1-t} p''(x)^t$ となるから，$(t_1+t_2)/2 \in T$ である．ゆえに $T=[0,1]$．▮

〈定理 9.10〉 単調性：$p' \geqq q'$, $p'' \geqq q''$ であれば，

$$\mathrm{QI}_t(p', p'') \geqq \mathrm{QI}_t(q', q''), \quad \forall t \in [0,1].$$

証明 $\mathrm{QM}(p', p'') \geqq \mathrm{QM}(q', q'')$ は QM の定義より明らか．$T=\{t \in \boldsymbol{R}\,;\ \mathrm{QI}_t(p', p'') \geqq \mathrm{QI}_t(q', q'')\}$ とおくと，T は閉集合．$\mathrm{QI}_{1/2}(p', p'')=p_{1/2}=\mathrm{QM}(p', p'') \geqq \mathrm{QM}(q', q'')=q_{1/2}=\mathrm{QI}_{1/2}(q', q'')$ であるから $1/2 \in T$．したがって，(Q.I.2) より $0 \in T$ および (Q.I.3) より $1 \in T$．また $t_1, t_2 \in T$ とすると，$\mathrm{QI}_{(t_1+t_2)/2}(p', p'')=\mathrm{QM}(p_{t_1}, p_{t_2}) \geqq \mathrm{QM}(q_{t_1}, q_{t_2})=\mathrm{QI}_{(t_1+t_2)/2}(q', q'')$．ゆえに $(t_1+t_2)/2 \in T$．よって $T=[0,1]$．▮

この単調性が次の節で議論する相対エントロピーの単調性の基礎となるのである．

ここで，WYDL 凹性の一般化とみなせる次の定理(Wigner-Yanase-Dyson-Lieb-Uhlmann の凹性とよぶ）を証明しよう．

〈定理 9.11〉 WYDLU 凹性：$p', p'', q', q'', r', r''$ を $\mathcal{L}$ 上の半ノルムとし，任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して，

$$r'^2 \geqq \lambda p'^2+(1-\lambda)q'^2, \quad r''^2 \geqq \lambda p''^2+(1-\lambda)q''^2$$

が満たされるとき，

$$\mathrm{QI}_t(r', r'')^2 \geqq \lambda\, \mathrm{QI}_t(p', p'')^2+(1-\lambda)\mathrm{QI}_t(q', q'')^2, \quad \forall t \in [0,1]$$

が成立する．

証明 上記の不等式が成立する t の全体を T とすると，T は閉集合となる．また，〈系 9.4〉と $p_{1/2}=\mathrm{QM}(p', p'')$ であることより，$1/2 \in T$．したがって，通常の方法で，$0, 1 \in T$ が示せる．また $t_1, t_2 \in T$ ならば，$p_{(t_1+t_2)/2}=\mathrm{QM}(p_{t_1}, p_{t_2})=\mathrm{QI}_{(t_1+t_2)/2}(p', p'')$ であるから，再び〈系 9.4〉より，$(t_1+t_2)/2 \in T$．ゆえに $T=[0,1]$．▮

ここで，この定理の基となった WYDL 凹性について簡単に説明しておこ

う．**WYDL 凹性**とは $f(A,B)=\mathrm{tr}\,X^*A^{1-t}XB^t$ （$\forall t\in[0,1]$）が定義されるすべての A,B,X に対して，$f(A,B)$ が同時凹になることをいう．すなわち，任意の $\lambda\in[0,1]$ に対して，

$$f(\lambda A_1+(1-\lambda)A_2,\lambda B_1+(1-\lambda)B_2)\geqq\lambda f(A_1,B_1)+(1-\lambda)f(A_2,B_2)$$

が成立する．

ところで，状態 ρ とある観測量 $X(=X^*)$ との間の非可換性の度合を表す量として Wigner と Yanase [W 4,5]

$$S(\rho,X)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\rho^{1/2},X]^2 \tag{9.2}$$

を導入した．これを**歪**（**skew**）**エントロピー**という．Dyson はこれを一般化して

$$S_t(\rho,X)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}([\rho^t,X][\rho^{1-t},X]),\quad\forall t\in(0,1) \tag{9.3}$$

を考えた．このとき，$S_{1/2}(\rho,X)=S(\rho,X)$ である．物理量としての X は一般に非有界作用素であるが，ここでは簡単のため $X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ とする．以上の定式化の下で，$S_t(\rho,X)$ が $S(\rho)$ と同様な特質を有しているかどうかがまず問題となる．たとえば，

$$S_t(\rho,X)=-\mathrm{tr}\,\rho X^2+\mathrm{tr}\,X\rho^tX\rho^{1-t}$$

と書けるから，第2項が ρ に関して凹性をもてば，$S_t(\rho,X)$ も ρ に関して凹性をもつことになる．この凹性に関する問題を完全に解決したのが Lieb[L 5] である．Lieb は前述した場合 $f(A,B)=\mathrm{tr}\,X^*A^{1-t}XB^t$（$\forall t\in(0,1)$）も含めて，$f_s(A,B,X)=(\mathrm{tr}\,X^*A^\alpha XB^\beta)^s$ （$\alpha+\beta=\gamma\leqq1$）が

（1） $0<s\leqq1/\gamma$ ⇨ A,B に関して同時凹，

（2） $s<0$ ⇨ A,B に関して同時凸，

（3） $s\geqq1/2$ ⇨ X に関して凸，

であることを示した．

実際，次の補題を使うと，$f(A,B)$ の凹性が〈定理 9.11〉から容易に導かれる．

〈**補題 9.12**〉 ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ において，$AB=BA$ となる $A,B\in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})_+$ を使って $\mathcal{H}$ 上の半ノルム p',p'' を

$$p'(x)=\langle x, Ax\rangle^{1/2},\quad p''(x)=\langle x, Bx\rangle^{1/2},\quad \forall x\in\mathcal{H}$$

と定めると次が成立する．

（1）　$p_t(x)=\mathrm{QI}_t(p',p'')(x)=\langle x, A^{1-t}B^tx\rangle^{1/2},\ \forall x\in\mathcal{H},\ \forall t\in[0,1]$.

（2）　この p_t は $0<\mathrm{Re}\,z<1$ で解析的かつ $0\leqq \mathrm{Re}\,z\leqq 1$ 上で連続な函数 p_z に解析接続できる．

証明　$T=\{t\in\boldsymbol{R}\,;\,p_t(x)=\langle x, A^{1-t}B^tx\rangle^{1/2},\ x\in\mathcal{H}\}$ とおくと，T は閉集合で，〈補題 9.5〉より $1/2\in T$．さらに，

$$p_{1/4}(x)=\mathrm{QM}(p',p_{1/2})(x)=\langle x, A^{1/2}(A^{1/2}B^{1/2})^{1/2}x\rangle^{1/2}=\langle x, A^{3/4}B^{1/4}x\rangle^{1/2}$$

であるから，$1/4\in T$．これを繰り返して，$0\in T$．同様にして，$1\in T$ が示せる．また，$t_1,t_2\in T$ に対して，$t=(t_1+t_2)/2$ とおくと，

$$\begin{aligned}p_t(x)&=\mathrm{QM}(p_{t_1},p_{t_2})(x)=\langle x, A^{(1-t_1)/2}B^{t_1/2}A^{(1-t_2)/2}B^{t_2/2}x\rangle^{1/2}\\&=\langle x, A^{1-t}B^tx\rangle^{1/2}\end{aligned}$$

となり，$t\in T$．したがって，$T=[0,1]$ である．

後半は，A,B のスペクトル分解を $A=\int\lambda E_A(d\lambda)$，$B=\int\mu E_B(d\mu)$ とすると，A,B の可換性より，E_A と E_B も可換だから，

$$p_t(x)=\iint\lambda^{1-t}\mu^t\langle x, E_A(d\lambda)E_B(d\mu)x\rangle^{1/2}$$

より，$z\in\boldsymbol{C}\to p_z(x)$ は $0<\mathrm{Re}\,z<1$ で解析的，かつ $0\leqq\mathrm{Re}\,z\leqq 1$ で連続になる．∎

さて，$p'(X)=(\mathrm{tr}\,X^*AX)^{1/2}=\langle\!\langle X, AX\rangle\!\rangle^{1/2}$ および $p''(X)=(\mathrm{tr}\,X^*XB)^{1/2}=\langle\!\langle X, XB\rangle\!\rangle^{1/2}$ が定義される X,A,B に関して，〈定理 9.6〉と〈補題 9.12〉を適用すると

$$p_t(X)=(\mathrm{tr}\,X^*A^{1-t}XB^t)^{1/2}\tag{9.4}$$

となる．いま，半ノルム r',r'',q',q'' を適当な A,B,A',B' を使って

$$r'(X)=(\mathrm{tr}\,X^*\{\lambda A+(1-\lambda)A'\}X)^{1/2}$$

$$r''(X)=(\mathrm{tr}\, X^*X\{\lambda B+(1-\lambda)B'\})^{1/2}$$
$$q'(X)=(\mathrm{tr}\, X^*A'X)^{1/2}$$
$$q''(X)=(\mathrm{tr}\, X^*XB')^{1/2}$$

と定めると，$r'(X)^2=\lambda p'(X)^2+(1-\lambda)q'(X)^2$ および $r''(X)^2=\lambda p''(X)^2+(1-\lambda)q''(X)^2$ が成立する．したがって，〈定理 9.11〉より，$r_t(X)^2\geqq\lambda p_t(X)^2+(1-\lambda)q_t(X)^2$ がわかる． こうして，$A, B\longmapsto(\mathrm{tr}\, X^*A^{1-t}XB^t)^{1/2}$ は同時凹函数であることが示せた．

〈補題 9.13〉 半ノルム p, p', p'' に関して，次が成立する．

（1） $\mathrm{QI}_t(p', p'')=\mathrm{QI}_{1-t}(p'', p')$.

（2） $\mathrm{QI}_t(p, p)=p$.

（3） $\mathrm{QI}_t(\lambda p', \mu p'')=\lambda^{1-t}\mu^t\mathrm{QI}_t(p', p'')$, $\forall\lambda, \mu\in\boldsymbol{R}^+$.

証明 （1），（2），（3）とも証明方法は同じなので，ここでは（1）のみ証明する．$p_t=\mathrm{QI}_t(p', p''), q_t=\mathrm{QI}_t(p'', p')$ とし，$T=\{t\in\boldsymbol{R}\,;\, p_t=q_{1-t}\}$ とおくと，これは閉集合． また，$p_{1/2}=\mathrm{QM}(p', p'')=\mathrm{QM}(p'', p')=q_{1/2}$ であるから，$1/2\in T$． さらに，$p_{1/4}=\mathrm{QM}(p', p_{1/2})=\mathrm{QM}(p', q_{1/2})=q_{1/2(1+1/2)}=q_{3/4}$ より $1/4\in T$．これを繰り返して $0\in T$．同様にして，$1\in T$．また，$t_1, t_2\in T$ のとき，$(t_1+t_2)/2\in T$ が示せる．ゆえに，$T=[0,1]$ となる．▮

$\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ を２つの複素線形空間とし，Λ を $\mathcal{L}'$ から $\mathcal{L}$ への線形写像とする．また Λ^* を Λ の共役写像，すなわち，Λ^* は $\mathcal{L}$ 上の半ノルムを $\mathcal{L}'$ 上の半ノルムへ移すもので

$$(\Lambda^*p)(x')=p(\Lambda x'),\quad \forall x'\in\mathcal{L}'$$

で定められる写像とする．

〈補題 9.14〉 $\mathcal{L}$ 上の半ノルム p, q に対して次が成立．

（1） $\mathrm{QM}(p, q)(\Lambda x')\leqq\mathrm{QM}(\Lambda^*p, \Lambda^*q)(x')$, $\forall x'\in\mathcal{L}'$.

（2） $\mathrm{QI}_t(p, q)(\Lambda x')\leqq\mathrm{QI}_t(\Lambda^*p, \Lambda^*q)(x')$, $\forall x'\in\mathcal{L}'$.

（3） $\mathcal{L}=\mathcal{L}'$ かつ $\Lambda^*q\leqq q, \Lambda^*p\leqq p$ ならば

$$\mathrm{QI}_t(p,q)(\Lambda x)\leqq \mathrm{QI}_t(p,q)(x),\quad \forall x\in\mathcal{L}.$$

証明　任意の $\alpha\in\mathcal{S}(p,q)$ に対して，$\mathcal{L}$ 上で $|\alpha(x,y)|\leqq p(x)q(y)$ であるから，$x=\Lambda x', y=\Lambda y'$ ととると，$|\alpha(\Lambda x',\Lambda y')|\leqq p(\Lambda x')q(\Lambda y')=(\Lambda^*p)(x')(\Lambda^*q)(y')$ となる．よって，$\alpha\in\mathcal{S}(\Lambda^*p,\Lambda^*q)$．ゆえに，QM の定義より，（1）が成立する．（2）は（1）と QI_t ち定義より明らか．また，（3）は（2）と〈定理 9.10〉より明らか．▮

複素線形空間 $\mathcal{L}$ 上の正値エルミート形式の全体を $\mathcal{S}_\mathcal{L}$ とする．また，$\alpha\in\mathcal{S}_\mathcal{L}$ に対して $\mathcal{L}$ からある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への線形写像 h とある作用素 $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})_+$ が存在して，$\alpha(x,y)=\langle h(x),Ah(y)\rangle$ $(\forall x,y\in\mathcal{L})$ を満たすとき，組 (h,A) を α の**表現**といい，$\alpha\sim(h,A)$ で表す．次の定理は Pusz と Woronowicz [P 7] による．

〈定理 9.15〉　任意の $\alpha,\beta\in\mathcal{S}_\mathcal{L}$ に対して，表現 $\alpha\sim(h,A)$ および $\beta\sim(h,B)$ が存在して，$AB=BA$.

証明　$\mathcal{K}=\{x\in\mathcal{L}\,;\,\alpha(x,x)+\beta(x,x)=0\}$ とおくと，商空間 $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ は $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ の任意の元 $[x],[y]$ に対して，$\langle[x],[y]\rangle=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$ を内積とする内積空間となる．この内積で $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ を完備化した Hilbert 空間を $\mathcal{H}$ と書く．$[x]$ を $h(x)$ $(\forall x\in\mathcal{L})$ とおくと，共役双線形写像 $h(\mathcal{L})\times h(\mathcal{L})\ni(h(x),h(y))\longmapsto\alpha(x,y)$（および，$\beta(x,y)$）は上記の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して連続であるから，Riesz の定理より，$A,B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在して，

$$\alpha(x,y)=\langle h(x),Ah(y)\rangle,\quad \beta(x,y)=\langle h(x),Bh(y)\rangle$$

と表せる．さらに，定義より $\langle h(x),h(y)\rangle=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$ であるから，$A+B=I$．ゆえに $\alpha\sim(h,A)$，$\beta\sim(h,B)$ で $AB=BA$．▮

この定理より次の結果が得られる．

〈定理 9.16〉　$\alpha,\beta\in\mathcal{S}_\mathcal{L}$ に対して，次の性質を満たす共役双線形形式 γ_t $(0\leqq t\leqq 1)$ が一意に存在する．

（1）　$p'(x)=\alpha(x,x)^{1/2}$，$p''(x)=\beta(x,x)^{1/2}$ とおくと，$\mathrm{QI}_t(p',p'')(x)=$

$\gamma_t(x,x)^{1/2}$, $\forall x\in\mathcal{L}$.

（2） $\gamma_z(x,y)$ は $0\leqq \mathrm{Re}\, z\leqq 1$ で連続かつ $0<\mathrm{Re}\, z<1$ で解析的.

（3） $\bar{\gamma}_z=\gamma_{\bar{z}}$.

（4） $\mathrm{Re}\, z=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$ のとき, $|\gamma_z(x,y)|\leqq p_{t_1}(x)p_{t_2}(y)$.

（5） 写像 $\alpha,\beta\longmapsto\gamma_t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ は同時凹.

証明　〈定理 9.15〉の手法で Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ をつくり, α,β を (h,A), (h,B) で表現すると,〈補題 9.12〉より

$$\mathrm{QI}_t(p',p'')(x)=\langle h(x),\ A^{1-t}B^th(x)\rangle^{1/2},\quad \forall x\in\mathcal{L}$$

となる. これを $\gamma_t(x,x)^{1/2}$ とおけばよい. この γ_t は〈補題 9.7〉より一意. さらに,〈補題 9.12〉と偏極化（付章 1.1 項）より（2）も成立.（3）は直接計算すればわかる.（4）は $\mathrm{QI}_t(p',p'')(x)=p_t(x)=\mathrm{QM}(p_{t_1},p_{t_2})(x)\leqq(p_{t_1}(x)p_{t_2}(x))^{1/2}$ より明らか.（5）は〈定理 9.11〉による. ▌

9.2　相対エントロピーの諸性質

この節では Uhlmann に従って相対エントロピーを定義し, 連続性を除くその主たる性質を論ずる.

任意の正値エルミート形式 α,β に対して, $\mathcal{L}$ 上の半ノルム p',p'' を $p'(x)=\alpha(x,x)^{1/2}$, $p''(x)=\beta(x,x)^{1/2}$ $(\forall x\in\mathcal{L})$ と定めると,〈定理 9.16〉より $\mathrm{QI}_t(p',p'')^2(x)$ が α,β で表せる. これを $\mathrm{QF}_t(\alpha,\beta)(x,x)$ $(\forall x\in\mathcal{L})$ と書き, $\mathcal{L}$ 上の **2 次汎函数** (quadratical functional) という. さらに, $\mathcal{L}$ 上の他の汎函数 $S(\alpha|\beta): x\in\mathcal{L}\longmapsto S(\alpha|\beta)(x)\in\boldsymbol{R}$ を次のように定める.

$$S(\alpha|\beta)(x)=-\liminf_{t\to+0}\frac{\mathrm{QF}_t(\alpha,\beta)(x,x)-\alpha(x,x)}{t}\qquad(9.5)$$

この $S(\alpha|\beta)$ を組 (α,β) に対する**相対エントロピー汎函数**という.

以下の定理において, α,β は $\mathcal{L}$ 上の正値エルミート形式とする.

〈定理 9.17〉　$S(\alpha|\beta)$ は α,β に関して同時凸函数.

証明　〈定理 9.16〉より $(\alpha,\beta)\longmapsto\mathrm{QF}_t(\alpha,\beta)-\alpha$ は同時凹函数. ゆえに,

$(\alpha,\beta)\mapsto S(\alpha|\beta)$ は同時凸函数. ▌

〈定理 9.18〉 任意の $x\in\mathcal{L}$ に対して，次が成立する.

（1） **Peierls-Bogoliubov 不等式**：$S(\alpha|\beta)(x)\geqq\alpha(x,x)\{\log\alpha(x,x)-\log\beta(x,x)\}$.

（2） $S(\alpha|\beta)(x)\geqq\alpha(x,x)-\beta(x,x)$.

証明 （1）:〈定理 9.16〉と〈補題 9.9〉より

$$
\begin{aligned}
S(\alpha|\beta)(x)&=-\liminf_{t\to+0}\frac{\gamma_t(x,x)-\alpha(x,x)}{t}\\
&\geqq-\liminf_{t\to+0}\frac{\alpha(x,x)^{1-t}\beta(x,x)^t-\alpha(x,x)}{t}\\
&=\alpha(x,x)\{\log\alpha(x,x)-\log\beta(x,x)\}.
\end{aligned}
$$

（2）:（1）の不等式に Klein の不等式 $\log\lambda\geqq\lambda-1$, $\lambda=\beta(x,x)/\alpha(x,x)$ を適用すればよい. ▌

2つの複素線形空間 $\mathcal{L},\mathcal{L}'$ において，$\mathcal{L}'$ から $\mathcal{L}$ への線形写像を Λ とすると，〈補題 9.14〉の（2）より次の補題が容易に導かれる.

〈補題 9.19〉 写像 $\tilde{\Lambda}$ を $(\tilde{\Lambda}\alpha)(x',y')=\alpha(\Lambda x',\Lambda y')$ $(\forall x',y'\in\mathcal{L}')$ で定めると，

$$S(\tilde{\Lambda}\alpha|\tilde{\Lambda}\beta)(x')\leqq S(\alpha|\beta)(\Lambda x'),\quad\forall x'\in\mathcal{L}$$

が成立する.

$\mathcal{L}_0$ を $\mathcal{L}$ の線形部分空間とし，正値エルミート形式 α,β の $\mathcal{L}_0$ への制限を $\alpha_0(\equiv\alpha\upharpoonright\mathcal{L}_0)$, $\beta_0(\equiv\beta\upharpoonright\mathcal{L}_0)$ とおくと，次の単調性が上記の補題より簡単にわかる.

〈定理 9.20〉 単調性：$S(\alpha_0|\beta_0)(x_0)\leqq S(\alpha|\beta)(x_0)$, $\forall x_0\in\mathcal{L}_0$

証明 線形写像 $\Lambda:\mathcal{L}_0\to\mathcal{L}$ をうめ込みとすると，$\tilde{\Lambda}\alpha=\alpha_0$ となり，〈補題 9.19〉より明らか. ▌

〈**定理 9.21**〉 $\beta \geqq \beta'$ であれば，$S(\alpha|\beta) \leqq S(\alpha|\beta')$.

証明 QI_t の単調性（〈定理 9.10〉）と $S(\alpha|\beta)$ の定義より明らか．▌

ここで，＊代数 $\mathcal{A}$ 上の正の線形汎函数 φ に対して，$\mathcal{A}$ 上の正のエルミート形式 φ^L と φ^R を次のように定める．

$$\varphi^L(A, B) = \varphi(A^*B) \tag{9.6}$$

$$\varphi^R(A, B) = \varphi(BA^*). \tag{9.7}$$

このとき，〈定理 9.16〉の（5）より，任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，写像

$$(\psi, \varphi) \longmapsto \mathrm{QF}_t(\psi^R, \varphi^L)(A, A)$$

は φ, ψ に関して同時凹函数であることがわかる．さて，φ と ψ の**相対エントロピー** $S(\psi|\varphi)$ を

$$S(\psi|\varphi) = S(\psi^R|\varphi^L)(I) \tag{9.8}$$

と定める．ただし，I は $\mathcal{A}$ の単位元である．この定義は次節でみるように，半有限な場合の Umegaki による定式化の拡張になっているものである．

ここで，２つの＊代数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の間の線形写像 $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ で次の性質をもつものを考える．任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\Lambda(B^*) = \Lambda(B)^*, \tag{9.9}$$

$$\Lambda(B)^*\Lambda(B) \leqq \Lambda(B^*B). \tag{9.10}$$

この写像 Λ と $\mathcal{A}$ 上の任意の正の線形汎函数 φ, ψ に対して，$\mathcal{B}$ 上の正の線形汎函数 $\varphi_\Lambda, \psi_\Lambda$ を

$$\varphi_\Lambda(B) = \varphi(\Lambda(B)), \quad \psi_\Lambda(B) = \psi(\Lambda(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

で定義すると次の定理が成立する．

〈**定理 9.22**〉 上記の線形写像 $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$ 上の正の線形汎函数 φ, ψ および任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して次が成立する．

（1） $\mathrm{QF}_t(\psi^R, \varphi^L)(\Lambda(B), \Lambda(B)) \leqq \mathrm{QF}_t(\psi_\Lambda{}^R, \varphi_\Lambda{}^L)(B, B)$.

（2） $\Lambda(I_\mathcal{B}) = I_\mathcal{A}$ のとき，$S(\psi_\Lambda|\varphi_\Lambda) \leqq S(\psi|\varphi)$.

証明 $p(A) = \psi(AA^*)^{1/2}$，$q(A) = \varphi(A^*A)^{1/2}$ $(\forall A \in \mathcal{A})$，　$\tilde{p}(B) = p(\Lambda$

$(B))$，$\tilde{q}(B)=q(\Lambda(B))$ $(\forall B\in\mathcal{B})$ とおくと，〈補題 9.14〉の（2）より

$$\mathrm{QF}_t(\psi^R,\varphi^L)(\Lambda(B),\Lambda(B))=\mathrm{QI}_t(p,q)^2(\Lambda(B))$$
$$\leqq \mathrm{QI}_t(\tilde{p},\tilde{q})^2(B),\quad \forall B\in\mathcal{B}.$$

条件より，$\psi_\Lambda{}^R(B,B)=\psi_\Lambda(BB^*)=\psi(\Lambda(BB^*))\geqq\psi(\Lambda(B)\Lambda(B)^*)=\tilde{p}(B)^2$．同様に，$\varphi_\Lambda{}^L(B,B)\geqq\tilde{q}(B)^2$ となる．したがって，〈定理 9.10〉より，$\mathrm{QI}_t(\tilde{p},\tilde{q})^2(B)\leqq\mathrm{QF}_t(\psi_\Lambda{}^R,\varphi_\Lambda{}^L)(B,B)$．ゆえに，

$$\mathrm{QF}_t(\psi^R,\varphi^L)(\Lambda(B),\Lambda(B))\leqq\mathrm{QF}_t(\psi_\Lambda{}^R,\varphi_\Lambda{}^L)(B,B),\quad \forall B\in\mathcal{B}$$

が成立する．

（2）は（1）と $\Lambda(I_{\mathcal{B}})=I_{\mathcal{A}}$ および $S(\psi|\varphi)$ の定義より明らか．▮

この定理における写像 Λ は $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ への完全正写像（付章 4.5 項）よりも一般的であり，さらに次節で示されるように Uhlmann の相対エントロピーは密度作用素 ρ,σ に対する相対エントロピー $S(\sigma|\rho)$ を特殊な場合として含んでいるから，次の Lindblad [L 9] の結果は上記の〈定理 9.22〉の特別な場合になる．

“$\Lambda:\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\to\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が完全正写像で，$\Lambda(I)=I$ を満たすならば，$S(\Lambda^*\sigma|\Lambda^*\rho)\leqq S(\sigma|\rho)$，$\forall\rho,\sigma\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$.”

最後に，相対エントロピー $S(\psi|\varphi)$ の性質をまとめておこう．

〈定理 9.23〉 単位元 I を含む代数 $\mathcal{A}$ 上の正の線形汎関数 φ,ψ に対する $S(\psi|\varphi)$ は次の性質を有する．

（1）$\varphi(I)=\psi(I)$ ならば，$S(\psi|\varphi)\geqq 0$.

（2）$S(\psi|\varphi)$ は φ,ψ に関して同時凸函数である．

（3）$\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の＊部分代数で $I\in\mathcal{B}$ とするとき，

$$S(\psi\restriction\mathcal{B}|\varphi\restriction\mathcal{B})(\equiv S_{\mathcal{B}}(\psi|\varphi))\leqq S(\psi|\varphi).$$

（4）$\varphi'\leqq\varphi$ であれば，$S(\psi|\varphi)\leqq S(\psi|\varphi')$.

9.2 相対エントロピーの連続性

Araki [A 9, 10, 11] は Uhlmann より2年程前に Tomita–Takesaki 理論

を基盤として，von Neumann 代数（以下，v.N. 代数と略する．（付章 2.1 項を参照)）上の正の線形汎函数（付章 2.7 項）に対する相対エントロピーを定義した．この節では，Araki のこの定式化を述べ，それを使って相対エントロピーの連続性について調べる．なお，前節でみた Uhlmann の定式化は Araki の定式化の一般化である（〈定理 9.24〉）．

この節と次の節では v.N. 代数の基本的事項および Tomita–Takesaki 理論のいくつかの結果が必要となる．こういったことに不案内な読者は付章 2 および付章 3 を先に目を通すことを勧める．

$\mathfrak{N}$ を Hilbect 空間 $\mathcal{H}$ 上の σ–有限な v.N. 代数とし，$\mathcal{K}$ をある正錐とする．2 つの正の正規線形汎函数 $\varphi, \psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ がベクトル $x, y \in \mathcal{K}$ を使って次のように表されるとする．

$$\varphi(A) = \langle x, Ax \rangle, \quad \forall A \in \mathfrak{N}, \tag{9.11}$$

$$\psi(A) = \langle y, Ay \rangle, \quad \forall A \in \mathfrak{N}. \tag{9.12}$$

x の $\mathfrak{N}$ に関する台を $s^{\mathfrak{N}}(x)$，$\mathfrak{N}'$ に関する台を $s^{\mathfrak{N}'}(x)$ と書くと，$s^{\mathfrak{N}}(x)$ は $\mathcal{H}$ から $\{\mathfrak{N}'x\}^-$ への射影作用素であり，$s^{\mathfrak{N}'}(x)$ は $\mathcal{H}$ から $\{\mathfrak{N}x\}^-$ への射影作用素である（付章 3.3 項）．なお，$s^{\mathfrak{N}}(x)$ は φ の台 $s(\varphi)$ に等しいことがわかっている（付章 3.3 項の〈定理 3.9〉）．

いま，定義域が

$$\mathfrak{N}x + (I - s^{\mathfrak{N}'}(x))\mathcal{H} \tag{9.13}$$

である作用素 $S_{y,x}$ を，任意の $A \in \mathfrak{N}$ に対して

$$S_{y,x}(Ax + w) = s^{\mathfrak{N}}(x) A^* y \tag{9.14}$$

と定める．ただし，$w \in \mathcal{H}$ は $s^{\mathfrak{N}'}(x)w = 0$ を満たすベクトルである．さらに，定義域が

$$\mathfrak{N}'x + (I - s^{\mathfrak{N}}(x))\mathcal{H} \tag{9.15}$$

である作用素 $F_{y,x}$ を，任意の $A' \in \mathfrak{N}'$ に対して

$$F_{y,x}(A'x + w') = s^{\mathfrak{N}'}(x) A'^* y \tag{9.16}$$

と定める．ここで，$w' \in \mathcal{H}$ は $s^{\mathfrak{N}}(x)w' = 0$ を満たす．このとき，$S_{y,x}$，$F_{y,x}$ はともに可閉（付章 1.2 項）な共役線形作用素であることが簡単にわかる．

$S_{y,x}$, $F_{y,x}$ の閉包を $\bar{S}_{y,x}$, $\bar{F}_{y,x}$ で表す．Araki はこの $S_{y,x}$ より**相対モデュラー**（非有界）**作用素** $\Delta_{y,x}$ を導入した：

$$\Delta_{y,x} \equiv S_{y,x}{}^* \bar{S}_{y,x}. \tag{9.17}$$

この $\Delta_{y,x}$ は正の作用素であるから，そのスペクトル分解は

$$\Delta_{y,x} = \int_0^\infty \lambda \, dE_{y,x}(\lambda) \tag{9.18}$$

と書ける．Araki は $\Delta_{y,x}$ を使って，ψ の $\varphi(\neq 0)$ に対する**相対エントロピー**を次のように定めた．

$$S(\psi|\varphi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{+0}^\infty \log\lambda \, d\langle y, E_{y,x}(\lambda)y\rangle & (\mathrm{s}(\varphi) \geqq \mathrm{s}(\psi) \text{ のとき}) \\ +\infty & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

註 （1）: $\mathrm{s}(\varphi)\geqq \mathrm{s}(\psi)$ は $\varphi \gg \psi$（付章 4.2 項）と書くことが多い．（2） $\mathrm{s}(\varphi)\geqq \mathrm{s}(\psi)$ のときは，$S(\psi|\varphi) = \langle y, \log \Delta_{y,x} y\rangle$ と表すこともある．（3） $S(\psi|\varphi)$ は正錐 $\mathcal{K}$ の取り方に依存していない．このことはすべての正錐がユニタリー同値であることから容易に結論される．（4） $\Delta_{y,x}$ と Connes の R. N. D. $(\mathrm{D}\varphi:\mathrm{D}\psi)_t$ は φ と ψ が忠実なとき次の関係にある：$(\mathrm{D}\psi:\mathrm{D}\varphi)_t = \Delta_{y,x}{}^{it}\Delta_x{}^{-it}$.

こうして導入された Araki の相対エントロピーは Uhlmann の相対エントロピー (9.8) に等しいことがわかる．

〈定理 9.24〉 v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ 上の任意の正の線形汎函数 φ, ψ に対して，$S(\psi|\varphi)_{\mathrm{Araki}} = S(\psi|\varphi)_{\mathrm{Uhlmann}}$.

証明 $\mathcal{L} = \mathrm{dom}(I+\Delta_{y,x})^{1/2}$ とおくと，これは次の内積の下で Hilbert 空間となる．任意の $z_1, z_2 \in \mathcal{L}$ に対して，

$$\langle\!\langle z_1, z_2\rangle\!\rangle \equiv \langle (I+\Delta_{y,x})^{1/2}z_1,\ (I+\Delta_{y,x})^{1/2}z_2\rangle.$$

$\Delta_{y,x}$ のスペクトル $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Delta_{y,x})$ は正だから $(I+\Delta_{y,x})^{-1}$, $\Delta_{y,x}(I+\Delta_{y,x})^{-1}$ とも有界作用素である．ここで $\mathcal{L}$ 上の正のエルミート形式 α, β を次のように定める．

$$\alpha(z_1, z_2) = \langle\!\langle z_1, \Delta_{y,x}(I+\Delta_{y,x})^{-1}z_2\rangle\!\rangle,$$
$$\beta(z_1, z_2) = \langle\!\langle z_1, (I+\Delta_{y,x})^{-1}z_2\rangle\!\rangle.$$

このとき，〈補題 9.12〉より，任意の $t\in[0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{QF}_t(\alpha,\beta)(z,z)\\&=\langle\!\langle z,[\Delta_{y,x}(I+\Delta_{y,x})^{-1}]^{1-t}[(I+\Delta_{y,x})^{-1}]^t z\rangle\!\rangle\\&=\langle\!\langle z,\Delta_{y,x}{}^{1-t}(I+\Delta_{y,x})^{-1}z\rangle\!\rangle\\&=\langle z,\Delta_{y,x}{}^{1-t}z\rangle.\end{aligned}$$

ところで，$\mathfrak{N}x\subset\mathcal{L}$，$\varphi^L(A,B)=\langle\!\langle Ax,(I+\Delta_{y,x})^{-1}Bx\rangle\!\rangle$，及び (9.14) より $\psi^R(A,B)=\langle B^*y,A^*y\rangle=\langle\!\langle Ax,\Delta_{y,x}(I+\Delta_{y,x})^{-1}Bx\rangle\!\rangle$ であるから，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して

$$\mathrm{QF}_t(\psi^R,\varphi^L)(A,A)=\mathrm{QF}_t(\alpha,\beta)(Ax,Ax)$$

となる．したがって，等式 $\psi^R(I,I)=\|\Delta_{y,x}{}^{1/2}x\|^2$ と $\Delta_{y,x}$ のスペクトル分解に注意すると，$\mathrm{s}(\varphi)\geqq\mathrm{s}(\psi)$ のとき

$$\begin{aligned}&S(\psi|\varphi)_{\mathrm{Uhlmann}}=S(\psi^R|\varphi^L)(I)\\&=-\liminf_{t\to+0}\frac{1}{t}\{\langle x,\Delta_{y,x}{}^{1-t}x\rangle-\langle x,\Delta_{y,x}x\rangle\}\\&=-\liminf_{t\to+0}\int_{+0}^{\infty}\lambda\frac{\lambda^{-t}-1}{t}d\langle x,E_{y,x}(\lambda)x\rangle\\&=\int_{+0}^{\infty}\lambda\log\lambda\,d\langle x,E_{y,x}(\lambda)x\rangle=\int_{+0}^{\infty}\log\lambda\,d\langle y,E_{y,x}(\lambda)y\rangle\\&=S(\psi|\varphi)_{\mathrm{Araki}}\end{aligned}$$

さらに，$\mathrm{s}(\varphi)\ngeqq\mathrm{s}(\psi)$ のときは，$\psi^R(I,I)<\|\Delta_{y,x}{}^{1/2}x\|^2$ であるから，$S(\psi^R|\varphi^L)(I)=+\infty$ となる．▌

ところで，v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ ではなく，より一般の C* 代数 $\mathcal{A}$ 上の正の線形汎函数 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}_+^*$（付章 2.1 および付章 2.4 項）に対する Uhlmann の相対エントロピーは Araki の相対エントロピーとどのように係わっているであろうか？　これに答えるのが次の定理である [H5]. 上の φ と ψ に対して $\varphi+\psi\in\mathcal{A}_+^*$ であり，この $\varphi+\psi$ の GNS 表現（付章 2.5 項）を $\pi(=\pi_{\varphi+\psi})$ とし，$\tilde{\varphi},\tilde{\psi}$ を v.N. 代数 $\pi(\mathcal{A})''$ への自然な拡張（付章 3.1 項）とする．

〈定理 9.25〉 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}_+^*$ に対して，上の記号の下で，

$$S(\psi|\varphi)=S(\tilde{\psi}|\tilde{\varphi}).$$

証明　任意の $A\in\mathcal{A}$, $t\in[0,1]$ に対して,

$$\mathrm{QF}_t(\psi^R,\varphi^L)(A,A)=\mathrm{QF}_t(\tilde{\psi}^R,\tilde{\varphi}^L)(\pi(A),\pi(A)) \tag{9.19}$$

を示せばよい. (9.19) が成立するような $t\in\boldsymbol{R}$ の集合を T とおき, $\mathcal{A}$ 上の正のエルミート形式 α の集合 $\mathcal{S}$ と, $\pi(\mathcal{A})''$ 上のそれ $\tilde{\alpha}$ の集合 $\tilde{\mathcal{S}}$ を次のように定める.

$$\mathcal{S}=\{\alpha\ ;\ |\alpha(A,B)|\leqq\psi^R(A,A)^{1/2}\varphi^L(B,B)^{1/2},\ \ A,B\in\mathcal{A}\},$$
$$\tilde{\mathcal{S}}=\{\tilde{\alpha}\ ;\ |\tilde{\alpha}(A,B)|\leqq\tilde{\psi}^R(A,A)^{1/2}\tilde{\varphi}^L(B,B)^{1/2},\ \ A,B\in\pi(\mathcal{A})''\}.$$

いま, 任意の $\tilde{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}$ に対してαを $\alpha(A,B)=\tilde{\alpha}(\pi(A),\pi(B))$ ($\forall A,B\in\mathcal{A}$) とおくと, $\alpha\in\mathcal{S}$. また, 任意の $\alpha\in\mathcal{S}$ に対して $\hat{\alpha}$ を $\hat{\alpha}(\pi(A),\pi(B))=\alpha(A,B)$ とおくと, $\hat{\alpha}$ は$\pi(\mathcal{A})$上の正のエルミート形式となる. この $\hat{\alpha}$ は Kaplansky の稠密定理 (付章 2.7 項の〈定理 2.24〉) より $\tilde{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}$ へ一意に拡張できる. したがって, $\mathrm{QF}_{1/2}(\psi^R,\varphi^L)(A,A)=\mathrm{QF}_{1/2}(\tilde{\psi}^R,\tilde{\varphi}^L)(\pi(A),\ \pi(A))$ ($\forall A\in\mathcal{A}$) が成立する. ゆえに, $\frac{1}{2}\in T$. 後は, お決まりの論法により, $T=[0,1]$. ∎

さて, こうして導入された相対エントレピー $S(\psi|\varphi)$ が, 通常の場合, すなわち, 2つの有限測度 μ,ν に対する相対エントロピー $S(\nu|\mu)$ と, 2つの密度作用素 ρ,σ に対する相対エレトロピー $S(\rho|\sigma)$ の拡張になっていることを見ておこう.

1°　可測空間 $(X,\mathcal{F})$ 上の2つの有限測度を μ,ν に対して, $m=\frac{1}{2}(\mu+\nu)$ とおくと, μ,ν は Hilbert 空間 $L^2(X,m)$ に作用する v.N. 代数 $L^\infty(X,m)$ 上の正の正規線形汎函数とみなせる (付章 4.1 項). さて, Araki の流儀で $S(\nu|\mu)$ を計算してみよう. この場合, 正錐は $\mathcal{K}=L^2(X,m)_+$ であるから, 測度 μ,ν に対応する $\mathcal{K}$ の元を x,y とすると, Radon–Nikodym 微分を使って $x=\left(\dfrac{d\mu}{dm}\right)^{1/2}$, $y=\left(\dfrac{d\nu}{dm}\right)^{1/2}$ と表せる. さらに, $\Delta_{y,x}{}^{1/2}x=y$ であり, x の台は μ の台 $\mathrm{s}(\mu)$ に等しいから, 任意の $f\in L^\infty(X,m)$ に対して $\Delta_{y,x}f=\dfrac{d\nu}{d\mu}1_{s(\mu)}\cdot f$ となる. したがって $\mu\gg\nu$ のとき,

$$S(\nu|\mu)=\langle y,\log\Delta_{y,x}y\rangle$$

$$=\int_X y^2\cdot 1_{s(\mu)}\log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)dm=\int_X \log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)d\nu.$$

これは可換の場合の相対エントロピーである（第1巻第3章の式（3.2））

2° $\mathfrak{N}=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ のとき，$\psi,\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して $\sigma,\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ が一意に存在して，$\varphi(A)=\mathrm{tr}\,\sigma A$，$\psi(A)=\mathrm{tr}\,\rho A$（$\forall A\in\mathfrak{N}$）と表せる（付章4.2項）．Uhlmann の流儀で $S(\psi|\varphi)$ を計算しよう．$\psi^R(A,B)=\mathrm{tr}\,\rho BA^*$，$\varphi^L(A,B)=\mathrm{tr}\,\sigma A^*B$ とおくと，これは $\mathfrak{N}$ 上の正のエルミート形式で，〈補題 9.12〉および〈定理 9.16〉より

$$\mathrm{QF}_t(\psi^R,\varphi^L)(I,I)=\mathrm{QI}_t(\psi^R,\varphi^L)^2(I)=\mathrm{tr}\,\rho^{1-t}\sigma^t$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}S(\psi|\varphi)&=S(\psi^R|\varphi^L)(I)\\&=-\liminf_{t\to+0}\frac{1}{t}\{\mathrm{QF}_t(\psi^R,\varphi^L)(I,I)-\psi^R(I,I)\}\\&=-\liminf_{t\to+0}\frac{1}{t}\mathrm{tr}(\rho^{1-t}\sigma^t-\rho)\\&=\mathrm{tr}\,\rho(\log\rho-\log\sigma)=S(\rho|\sigma).\end{aligned}$$

さて以下，相対エントロピーの連続性を調べよう．〈定理 9.25〉より $S(\psi|\varphi)$ は C* 代数において論ずることもできるが，記号が繁雑になるので，ここでは，本質的に何ら変わりのない σ-有限 v.N. 代数において論ずることにする．

まず，作用素 $S_{y,x}$，$\Delta_{y,x}$ の性質を証明なしに記しておこう．証明は原論文 [A 11] を参照されたい．

〈補題 9.26〉 （1） $\ker\Delta_{y,x}=(I-s^{\mathfrak{N}'}(x)s^{\mathfrak{N}}(y))\mathcal{H}$.

（2） J を正錐 $\mathcal{K}$ に付随するモジュラー共役作用素（付章 3.2 項）とすると，$\bar{S}_{y,x}=J\Delta_{y,x}{}^{1/2}$，$\bar{F}_{y,x}=\Delta_{y,x}{}^{1/2}J$.

（3） $J\Delta_{x,y}J\Delta_{y,x}=\Delta_{y,x}J\Delta_{x,y}J=s^{\mathfrak{N}'}(x)s^{\mathfrak{N}}(y)$.

（4） $s^{\mathfrak{N}}(y_1)\perp s^{\mathfrak{N}}(y_2)$ ならば $\Delta_{y_1+y_2,x}=\Delta_{y_1,x}+\Delta_{y_2,x}$.

〈補題 9.27〉 任意の $\varphi, \psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ に対して,

$$S(\psi|\varphi) \geqq -\psi(I)\log\{\varphi(\mathrm{s}(\psi))/\psi(I)\}. \tag{9.20}$$

証明 $\mathrm{s}(\varphi) \ngeqq \mathrm{s}(\psi)$ のときは $S(\psi|\varphi)=+\infty$ であるから，不等式は自明. $\mathrm{s}(\varphi) \geqq \mathrm{s}(\psi)$ のときは, $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)=\mathrm{s}(\varphi)\geqq \mathrm{s}(\psi)=\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(y)$ および $\Delta_{y,x}{}^{1/2}x=y$ より,

$$\begin{aligned}\int_{+0}^{\infty}\lambda^{-1}d\langle y, E_{y,x}(\lambda)y\rangle &= \int_{+0}^{\infty}\lambda^{-1}d\langle x, \Delta_{y,x}E_{y,x}(\lambda)x\rangle \\ &= \int_{+0}^{\infty}d\langle x, E_{y,x}(\lambda)x\rangle = \langle x, (I-E_{y,x}(+0))x\rangle \\ &= \langle x, \mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(y)x\rangle = \langle x, \mathrm{s}(\psi)x\rangle \\ &= \varphi(\mathrm{s}(\psi)) \leqq \varphi(I)\end{aligned} \tag{9.21}$$

ここで,〈補題 9.26〉の（1）を使った。さらに,
$\int_{+0}^{\infty}d\langle y, E_{y,x}(\lambda)y\rangle=\psi(I)$ より, $d\langle y, E_{y,x}(\lambda)y\rangle/\psi(I)$ は $(0,\infty)$ 上の確率測度であるから $S(\psi|\varphi)$ の定義と log 函数の凹性より,

$$\begin{aligned}S(\psi|\varphi) &= -\psi(I)\int_{+0}^{\infty}\log(\lambda^{-1})d\langle y, E_{y,x}(\lambda)y\rangle/\psi(I) \\ &\geqq -\psi(I)\log\left\{\int_{+0}^{\infty}\lambda^{-1}d\langle y, E_{y,x}(\lambda)y\rangle/\psi(I)\right\} \\ &= -\psi(I)\log\{\varphi(\mathrm{s}(\psi))/\psi(I)\}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

この補題より，次の定理が示せる．なお，以下，φ, ψ は $\mathfrak{N}_{*,+}$ の元とする.

〈定理 9.28〉 （1） $\varphi(I)=\psi(I)$ のとき, $S(\psi|\varphi)\geqq 0$. さらに, $S(\psi|\varphi)=0 \Longleftrightarrow \varphi=\psi$. (後半は後述する〈定理 9.41〉を使えば自明.)

（2） $\mathrm{s}(\psi_1)\perp \mathrm{s}(\psi_2)$ ならば, $S(\psi_1+\psi_2|\varphi)=S(\psi_1|\varphi)+S(\psi_2|\varphi)$.

（3） $S(a\psi|b\varphi)=aS(\psi|\varphi)-a\psi(I)\log\dfrac{b}{a}$, $\forall a, b\in(0,\infty)$.

（4） $\psi\leqq\lambda\varphi$ $(\lambda\in(0,\infty))$ であれば $S(\psi|\varphi)\leqq\psi(I)\log\lambda$.

証明 （1）の前半は〈定理 9.23〉で証明ずみだが，これは〈補題 9.27〉からも明らか．さらに, $\psi=\varphi$ ならば, $S(\psi|\varphi)=0$ は定義より明らかだから, $S(\psi|\varphi)=0$ ならば $\psi=\varphi$ となることを示せばよい．$S(\psi|\varphi)=0$ ならば, $\mathrm{s}(\psi)$

$\leqq \mathrm{s}(\varphi)$ かつ $\varphi(\mathrm{s}(\psi))=\varphi(I)$ となる．よって，$\mathrm{s}(\psi)=\mathrm{s}(\varphi)$．ところで〈補題 9.26〉と等式 $J\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)J=\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)=\mathrm{s}(\varphi)$（付章 3.3 項参照）より

$$\begin{aligned}\ker \Delta_{y,x} &= (I-\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(y))\mathcal{H}\\ &=(I-J\mathrm{s}(\varphi)J\mathrm{s}(\psi))\mathcal{H}=(I-\mathrm{s}(\psi)J\mathrm{s}(\varphi)J)\mathcal{H}\\ &=(I-\mathrm{s}(\varphi)J\mathrm{s}(\varphi)J)\mathcal{H}.\end{aligned}$$

ゆえに，x, y とも Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0\equiv\mathrm{s}(\varphi)J\mathrm{s}(\varphi)J\mathcal{H}$ 上の v.N. 代数 $\mathfrak{M}=\mathrm{s}(\varphi)\mathfrak{N}\mathrm{s}(\varphi)$ に関して巡回かつ分離ベクトル（付章 2.4 項）になるから，φ と ψ はともに $\mathfrak{M}$ 上で忠実であり，$\mathfrak{M}$ 上の相対モジュラー作用素 $\Delta^{\mathfrak{M}}{}_{y,x}$ は $\Delta_{y,x}\restriction\mathcal{H}_0$ に等しい．よって，$S(\psi|\varphi)=S(\psi\restriction\mathfrak{M}|\varphi\restriction\mathfrak{M})$ となる．このことより，φ と ψ が忠実な場合に命題を証明すればよいことになる．このとき，$\mathrm{s}(\varphi)=\mathrm{s}(\psi)=I$ であるから，

$$\begin{aligned}S(\psi|\varphi)&=\int_{+0}^{\infty}\log\lambda\, d\langle y, E_{y,x}(\lambda)y\rangle\\ &=-2\psi(I)\int_{+0}^{\infty}\log\lambda^{-1/2}d\langle y, E_{y,x}(\lambda)y\rangle/\psi(I)\\ &\geqq -2\psi(I)\log\left\{\int_{+0}^{\infty}\lambda^{-1/2}d\langle y, E_{y,x}(\lambda)y\rangle/\psi(I)\right\}\\ &=-2\psi(I)\log\{\langle y,x\rangle/\psi(I)\}.\end{aligned}$$

ここで，Schwarz の不等式，$\langle y,x\rangle\leqq\|y\|\|x\|=\sqrt{\psi(I)\varphi(I)}$ を使うと，$S(\psi|\varphi)\geqq-\psi(I)\log(\varphi(I)/\psi(I))=0$．したがって，$S(\psi|\varphi)=0$ ならば $\langle y,x\rangle=\psi(I)$．よって，仮定 $\varphi(I)=\psi(I)$ より，$x=y$ となる．すなわち，$\varphi=\psi$．

（2）は〈補題 9.26〉の（4）と等式 $\mathrm{s}(\psi_k)=\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(y_k)$ より自明．

（3）は次のように証明される．$a\psi$ を表すベクトルは $\sqrt{a}\,y$ であり，$b\varphi$ のそれは $\sqrt{b}\,x$ であるから，$S_{\sqrt{a}y,\sqrt{b}x}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}S_{y,x}$ および $\Delta_{\sqrt{a}y,\sqrt{b}x}=\dfrac{a}{b}\Delta_{y,x}$．したがって，

$$\begin{aligned}S(a\psi|b\varphi)&=\langle\sqrt{a}\,y,\ \log\Delta_{\sqrt{a}y,\sqrt{b}x}\sqrt{a}\,y\rangle\\ &=a\left\langle y,\left\{\log\frac{a}{b}+\log\Delta_{y,x}\right\}y\right\rangle\\ &=\left(a\log\frac{a}{b}\right)\cdot\psi(I)+aS(\psi|\varphi).\end{aligned}$$

（4）は（3）より明らか．▌

〈**補題 9.29**〉 $\mathfrak{N}^*$ のノルム$\|\cdot\|$（付章2.4項参照）に関して，$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|=0$，$\lim_{n\to\infty}\|\psi_n-\psi\|=0$ であれば，任意の有限な正の定数 r に対して，

$$\text{u-}\lim_{n\to\infty}(r+\Delta_{y_n,x_n}{}^{1/2})^{-1}\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)=(r+\Delta_{y,x}{}^{1/2})^{-1}\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x).$$

ここで，x_n, y_n は各々 φ_n, ψ_n に付随するベクトルである（i.e., $\varphi_n(\cdot)=\langle x_n, \cdot x_n\rangle$，$\psi_n(\cdot)=\langle y_n, \cdot y_n\rangle$）．

証明　$\|\varphi_n-\varphi\|\to0$，$\|\psi_n-\psi\|\to0$ であるから，$\mathcal{H}$ において，$\|x_n-x\|\to0$，$\|y_n-y\|\to0$ である（付章 3.3 項の〈定理 3.8〉の（2））．任意の $A'\in\mathfrak{N}'$ に対して，

$$\begin{aligned}&\lim\|\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x_n)A'x-A'x\|\\&\quad=\lim\|\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x_n)A'(x-x_n)+A'(x_n-x)\|=0.\end{aligned}$$

ゆえに，$\lim \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x_n)\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)=\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)$．また，任意の $A\in\mathfrak{N}\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)$ に対して，

$$\begin{aligned}&\|\Delta_{y_n,x_n}{}^{1/2}Ax_n-\Delta_{y,x}{}^{1/2}Ax\|\\&\quad\le\|(\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x_n)\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)-\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x))A^*x\|\\&\quad+\|\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x_n)A^*(x_n-x)\|\to0\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}&\|\{[I+\Delta_{y_n,x_n}{}^{1/2}]^{-1}-[I+\Delta_{y,x}{}^{1/2}]^{-1}\}[I+\Delta_{y,x}{}^{1/2}]Ax\|\\&\quad\leqq2\|A(x_n-x)\|+\|\Delta_{y_n,x_n}{}^{1/2}Ax_n-\Delta_{y,x}{}^{1/2}Ax\|\to0.\end{aligned}$$

ところで，$\mathcal{D}\equiv\mathfrak{N}\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)x+(I-\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x))\mathcal{H}$ は $\Delta_{y,x}{}^{1/2}$ に関して芯となるから，集合 $\{(I+\Delta_{y,x}{}^{1/2})Ax\,;\,A\in\mathfrak{N}\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)\}$ は $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)\mathcal{H}$ で稠密である．このことと，$\|[I+\Delta_{y,x}{}^{1/2}]^{-1}\|\le1$，および，上記の収束の結果から，

$$\lim[I+\Delta_{y_n,x_n}{}^{1/2}]^{-1}\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)=[I+\Delta_{y,x}{}^{1/2}]^{-1}\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)$$

をうる．

いま，$r>0$ と正の自己共役作用素 Δ_n に対して，

$$R_r(\Delta_n)=\{I+(r-1)(I+\Delta_n)^{-1}\}^{-1}$$

とおくと，$(r+\Delta_n)^{-1}=R_r(\Delta_n)(I+\Delta_n)^{-1}$，および $\|R_r(\Delta_n)\|\leqq\max\{1, r^{-1}\}$ が成立する．さらに，正の自己共役作用素 Δ と，Δ に可換な射影作用素 s が存

在して，$\lim(I+\Delta_n)^{-1}\mathrm{s}=(I+\Delta)^{-1}\mathrm{s}$ であれば，等式 $(r+\Delta_n)^{-1}-(r+\Delta)^{-1}=R_r(\Delta_n)\{(I+\Delta_n)^{-1}-(I+\Delta)^{-1}\}-R_r(\Delta_n)(r-1)\{(I+\Delta_n)^{-1}-(I+\Delta)^{-1}\}R_r(\Delta)(I+\Delta)^{-1}$ より，

$$\text{u-}\lim\{(r+\Delta_n)^{-1}-(r+\Delta)^{-1}\}\mathrm{s}=0$$

が成立する．ここで，$\Delta_n=\Delta_{y_n,x_n}{}^{1/2}$，$\Delta=\Delta_{y,x}{}^{1/2}$，$\mathrm{s}=\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)$ ととればよい．∎

〈補題 9.30〉 $\mathrm{s}(\varphi)\geqq\mathrm{s}(\psi)$ ならば，

$$S(\psi|\varphi)=2\int_0^\infty dr\langle y,\{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{y,x}{}^{1/2})^{-1}y\}\rangle. \tag{9.22}$$

証明 $\log\lambda=2\int_0^\infty\{(1+r)^{-1}-(r+\lambda^{1/2})^{-1}\}dr$

であるから，

$$\begin{aligned}S(\psi|\varphi)&=\int_{+0}^\infty\log\lambda\,d\langle y,E_{y,x}(\lambda)y\rangle\\&=\int_{+0}^\infty 2\int_0^\infty dr\{(1+r)^{-1}-(r+\lambda^{1/2})^{-1}\}d\langle y,E_{y,x}(\lambda)y\rangle\\&=2\int_0^\infty dr\langle y,\{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{y,x}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle.\ ∎\end{aligned}$$

さて，相対エントロピーの連続性は次のように表せる[A 11].

〈定理 9.31〉 $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|=0$，$\lim_{n\to\infty}\|\psi_n-\psi\|=0$ であれば，次の（1），（2），（3）が成立する．

（1） **下半連続性**：$S(\psi|\varphi)\leqq\liminf_{n\to\infty}S(\psi_n|\varphi_n)$.

（2） ある正の数 λ が存在して，$\psi_n\leqq\lambda\varphi_n$ であれば，

$$\lim_{n\to\infty}S(\psi_n|\varphi_n)=S(\psi|\varphi).$$

（3） $\varphi_n\downarrow\varphi$ のとき，$\lim_{n\to\infty}S(\psi|\varphi_n)=S(\psi|\varphi)$.

証明 （1）の証明は3段階に分けて行う．$\mathrm{s}(\varphi_n)\geqq\mathrm{s}(\psi_n)$ と仮定しても一般性を失わないので以下これを仮定する．

［ステップ1］ φ が忠実のとき（1）を示す．このとき，$\mathrm{s}(\varphi)=I$ であるから，$\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)=J\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)J=J^2=I$. x_n,y_n を各々 φ_n,ψ_n に付随するベクトルとす

ると，$\|\varphi_n-\varphi\|\to 0$，$\|\psi_n-\psi\|\to 0$ であるから，$\|x_n-x\|\to 0$，$\|y_n-y\|\to 0$ が成立．したがって〈補題 9.29〉より，$0<\varepsilon<L<\infty$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^L dr\langle y_n,\ \{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{y_n,x_n}{}^{1/2})^{-1}\}y_n\rangle$$
$$=\int_\varepsilon^L dr\langle y,\ \{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{y,x}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle. \tag{9.23}$$

さらに，

$$\int_0^\varepsilon dr|\langle y_n,\ \{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{y_n,x_n}{}^{1/2})^{-1}\}y_n\rangle|$$
$$\leqq\int_0^\varepsilon dr\int_0^\infty \max(1,\lambda^{-1})d\langle y_n,E_{y_n,x_n}(\lambda)y_n\rangle$$
$$\leqq\varepsilon(\psi_n(I)+\varphi_n(I)),$$

$$\int_L^\infty dr\left|\int_0^1\{(1+r)^{-1}-(r+\lambda^{1/2})^{-1}\}d\langle y_n,E_{y_n,x_n}(\lambda)y_n\rangle\right|$$
$$\leqq\int_L^\infty dr(1+r)^{-1}r^{-1}\int_0^1 d\langle y_n,E_{y_n,x_n}(\lambda)y_n\rangle$$
$$\leqq\log(1+L^{-1})\psi_n(I),$$

および，

$$\int_L^\infty dr\int_1^\infty\{(1+r)^{-1}-(r+\lambda^{1/2})^{-1}\}d\langle y_n,E_{y_n,x_n}(\lambda)y_n\rangle\geqq 0.$$

したがって，〈補題 9.30〉と条件 $\varphi_n\to\varphi$，$\psi_n\to\psi$ より，

$$\liminf S(\psi_n|\varphi_n)$$
$$=\liminf 2\int_0^\infty dr\langle y_n,\ \{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{y_n,x_n}{}^{1/2})^{-1}\}y_n\rangle$$
$$\geqq 2\int_\varepsilon^L dr\langle y,\ \{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{y,x}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle$$
$$-2\varepsilon(\psi(I)+\varphi(I))-2\{\log(1+L^{-1})\}\psi(I).$$

ここで，極限 $\varepsilon\to 0$，$L\to\infty$ をとると，上式は〈補題 9.30〉より $S(\psi|\varphi)$ に等しい．ゆえに，$S(\psi|\varphi)\leqq\liminf S(\psi_n|\varphi_n)$．

［ステップ2］ $\psi_n=\psi$ $(\forall n)$ の場合．〈補題 9.26〉の（3）より，

$$\{\log\Delta_{yx}+J(\log\Delta_{x,y})J\}\,\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(y)\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)=0$$

を得るから，$\mathrm{s}(\varphi)\geqq\mathrm{s}(\psi)$ のときは

$$S(\psi|\varphi)=-\langle y, \log \Delta_{x,y}y\rangle$$

とも表せる．したがって，〈補題 9.30〉の計算と同様にして

$$S(\psi|\varphi_n)=-2\int_0^\infty dr\langle y, \{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x_n,y}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle$$

となる．〈補題 9.29〉により［ステップ 1］と同様にして

$$\begin{aligned}\liminf S(\psi|\varphi_n)&\geqq-2\int_0^\infty dr\langle y, \{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x,y}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle\\&=-2\int_0^\infty dr\langle y, \{(1+r)^{-1}-r^{-1}\}(I-\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x))y\rangle\\&\quad-2\int_0^\infty dr\langle y, \{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x,y}{}^{1/2})^{-1}\}\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)y\rangle\end{aligned}$$

上式の第 1 項は，$\langle y, (I-\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x))y\rangle=\psi(I-\mathrm{s}(\varphi))$ であるから，$\mathrm{s}(\varphi)\ngeqq\mathrm{s}(\psi)$ ならば，$+\infty$ となる．一方，第 2 項は有限であるか $+\infty$ であるから，$\liminf S(\psi|\varphi_n)=+\infty=S(\psi|\varphi)$ となる．また，$\mathrm{s}(\varphi)\geqq\mathrm{s}(\psi)$ であれば，当然，$\liminf S(\psi|\varphi_n)\geqq S(\psi|\varphi)$ となる．

［ステップ 3］ 一般の場合．$\omega\in\mathfrak{N}_{*,+}$ を忠実とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\varphi+\varepsilon\omega$ は忠実な正の正規線形汎函数となるから，［ステップ 1］より，

$$\liminf S(\psi_n|\varphi_n+\varepsilon\omega)\geqq S(\psi|\varphi+\varepsilon\omega).$$

〈定理 9.23〉の（4）より $\varphi_n+\varepsilon\omega\geqq\varphi_n$ だから

$$S(\psi_n|\varphi_n+\varepsilon\omega)\leqq S(\psi_n|\varphi_n).$$

したがって，$\liminf S(\psi_n|\varphi_n)\geqq S(\psi|\varphi+\varepsilon\omega)$．ここで，極限 $\varepsilon\to0$ をとると［ステップ 2］より

$$\liminf S(\psi_n|\varphi_n)\geqq S(\psi|\varphi).$$

次に（2）を証明しよう．$\psi_n\leqq\lambda\varphi_n$ $(\forall n)$ であり，$\varphi_n\to\varphi$, $\psi_n\to\psi$ であるから $\psi\leqq\lambda\varphi$．したがって，簡単な計算の結果，$r>0$ に対して

$$(\Delta_{x,y}+r)^{-1}\leqq(\lambda^{-1}\Delta_{y,y}+r)^{-1} \tag{9.24}$$

が成立する．また，正の自己共役作用素 A に対する等式

$$(r+A^{1/2})^{-1}=\pi^{-1}\int_0^\infty (A+t)^{-1}(t+r^2)^{-1}t^{1/2}dt$$

より，$(r+\Delta_{x,y}{}^{1/2})^{-1}\leqq(r+\lambda^{-1/2}\Delta_{y,y}{}^{1/2})^{-1}$ を得る．ゆえに，

$$\begin{aligned}\psi(I)&\geqq\langle y,\{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x,y}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle\\&\geqq\psi(I)\{(1+r)^{-1}-(r+\lambda^{-1/2})^{-1}\}\\&=\psi(I)(1+r)^{-1}(1+\lambda^{1/2}r)^{-1}(1-\lambda^{1/2}).\end{aligned}$$

したがって，$0<\varepsilon<L<\infty$ に対して

$$\begin{aligned}-\varepsilon\psi(I)&\leqq-\int_0^\varepsilon dr\langle y,\{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x,y}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle\\&\leqq\psi(I)\log\{(1+\varepsilon)(1+\lambda^{1/2}\varepsilon)^{-1}\}.\end{aligned}\tag{9.25}$$

さらに，不等式 $(r+\lambda^{1/2})^{-1}(\lambda^{1/2}-1)\leqq r^{-1}\lambda$ を使うと

$$\begin{aligned}\psi(I)\log(1+L^{-1})&=-\int_L^\infty\langle y,\{(1+r)^{-1}-r^{-1}\}y\rangle dr\\&\geqq-\int_L^\infty dr\langle y,\{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x,y}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle\\&=-\int_L^\infty dr\langle y,(1+r)^{-1}(r+\Delta_{x,y}{}^{1/2})^{-1}(\Delta_{x,y}{}^{1/2}-I)y\rangle\\&\geqq-\int_L^\infty dr(1+r)^{-1}r^{-1}\|\Delta_{x,y}{}^{1/2}y\|^2\\&=-\varphi(I)\log(1+L^{-1}).\end{aligned}\tag{9.26}$$

これらの不等式 (9.24)～(9.26) は組 (φ_n,ψ_n) に関しても成立する．また，(9.23) と同様

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^L dr\langle y_n,\{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x_n,y_n}{}^{1/2})^{-1}\}y_n\rangle\\&\qquad=\int_\varepsilon^L dr\langle y,\{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x,y}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle\end{aligned}$$

が得られるから，(9.24)～(9.26) より

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty dr\langle y,\{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x_n,y_n}{}^{1/2})^{-1}\}y_n\rangle\\&\qquad=\int_0^\infty dr\langle y,\{(1+r)^{-1}-(r+\Delta_{x,y}{}^{1/2})^{-1}\}y\rangle.\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty} S(\psi_n|\varphi_n)=S(\psi|\varphi).$$

（3）の証明：〈定理 9.23〉の（4）より $\varphi_n \geqq \varphi$ であるから $S(\psi|\varphi_n)\leqq S(\psi|\varphi)$ となり，さらに，この定理の（1）より，$S(\psi|\varphi)\leqq \liminf S(\psi|\varphi_n)$ であるから，等式（3）が成立する．▌

この連続性に関する定理を密度作用素に対する相対エントロピーの形で書くと，次のようになる．

〈系 9.32〉 $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})_+$ の元 $\rho_n, \rho, \sigma_n, \sigma$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty}\|\rho_n-\rho\|_1=\lim\limits_{n\to\infty}\|\sigma_n-\sigma\|_1=0$ であるとき次が成立する．

（1） $S(\rho|\sigma)\leqq \liminf\limits_{n\to\infty} S(\rho_n|\sigma_n)$.

（2） ある正の数 λ が存在して，$\rho_n \leqq \lambda\sigma_n$ であれば，

$$\lim_{n\to\infty} S(\rho_n|\sigma_n)=S(\rho|\sigma).$$

（3） $\sigma_n\downarrow\sigma$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} S(\rho|\sigma_n)=S(\rho|\sigma)$.

なお，v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}_\alpha$ が単調増大ネットであり，$\mathfrak{N}$ を生成する（i.e., $\mathfrak{M}_\alpha\uparrow\mathfrak{N}=\bigvee\limits_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$）場合を考えよう．このとき，$\varphi^{(\alpha)}$ を $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ の $\mathfrak{M}_\alpha$ への制限 $\varphi\upharpoonright\mathfrak{M}_\alpha$ とすると，Araki は

$$\liminf_\alpha S(\psi^{(\alpha)}|\varphi^{(\alpha)})\geqq S(\psi|\varphi)$$

を示した［A 11］．ところが，〈定理 9.23〉の（3）を考慮すると，実は次の等式が成立することがわかる．

〈定理 9.33〉 $\lim S(\psi^{(\alpha)}|\varphi^{(\alpha)})=S(\psi|\varphi)$.

最後に，2つの v.N. 代数 $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ および $\mathfrak{N}_1$ と $\mathfrak{N}_2$ のテンソル積（付章 2.10 項）$\mathfrak{N}_1\otimes\mathfrak{N}_2$ を考える．$\varphi_k, \psi_k\in\mathfrak{N}_{k,*,+}$ $(k=1,2)$ を $\varphi_k(\cdot)=\langle x_k, \cdot x_k\rangle$, $\psi_k(\cdot)=\langle y_k, \cdot y_k\rangle$ で定めると，**相対エントロピーの加法性**が示せる：

〈定理 9.34〉 $S(\psi_1\otimes\psi_2|\varphi_1\otimes\varphi_2)=S(\psi_1|\varphi_1)+S(\psi_2|\varphi_2)$.

証明 $\Delta^{\alpha}_{y_1\otimes y_2, x_1\otimes x_2}=\Delta^{\alpha}_{y_1,x_1}\otimes\Delta^{\alpha}_{y_2,x_2}$ $(\forall\alpha\in\boldsymbol{C})$
より直接計算すればよい． ▌

9.4 十分性と相対エントロピー

測度論的な十分性の概念および，それと相対エントロピーとの関係は第3章の3節で論じたが，この節ではそれらを量子系へ拡張する．

量子力学系における十分性の研究は Umegaki [U 6, 8], Gudder–Marchard [G 8], Hiai–Ohya–Tsukada [H 4, 5] などでなされている．

以下，$\mathfrak{N}$ を σ–有限な v.N. 代数，$\mathfrak{S}$ を $\mathfrak{N}$ 上の正規状態の全体，$\alpha(\boldsymbol{R})$ を $\mathfrak{N}$ 上の強連続一径数自己同型群，$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ を $\varphi\in\mathfrak{S}$ において，$\mathfrak{N}$ から v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ への条件付期待値とする（付章 4.3 項）．さらに，$I(\alpha)$ を α–不変 (i.e., $\varphi\circ\alpha_t=\varphi$, $\forall t\in\boldsymbol{R}$) な状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ の集合とし，$K(\alpha)$ を $\beta=-1$ で α に関して KMS 条件（付章 3.1 項）を満たす状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ の集合とする．$\varphi\in\mathfrak{S}$ が忠実であれば次が成立する．

（1） $\varphi\in K(\alpha)\Longleftrightarrow\alpha_t=\sigma_t^{\varphi}$, $\forall t\in\boldsymbol{R}$（付章 3.2 項参照）．

（2） $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ が存在する $\Longleftrightarrow\sigma_t^{\varphi}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$, $\forall t\in\boldsymbol{R}$（付章 4.3 項参照）．

$\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{S}$ のある部分集合 $\mathcal{S}$ に関して**十分**であるとは，任意の $\varphi\in\mathcal{S}$ と $A\in\mathfrak{N}$ に対して，条件付期待値 $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ 及び $A_0\in\mathfrak{M}$ が存在して

$$A_0=E_\varphi(A|\mathfrak{M})\quad \varphi\text{-a.e.}\tag{9.27}$$

となることである．ここで，φ–a.e. で $A=B$ であるとは $\varphi(|A-B|)=0$ のことである．さらに，$\mathcal{S}$ に関して十分な部分代数が必ず $\mathfrak{M}$ を含むとき，$\mathfrak{M}$ は $\mathcal{S}$ に関して**最小十分** (minimal sufficient) であるという．

次の結果が定義より容易に証明される．以下，$\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ とする．

1° $\psi\ll\varphi$ (i.e., $\varphi(A^*A)=0\Rightarrow\psi(A^*A)=0$（付章 4.27 項））のとき，次は同値：（1） $\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分；（2） $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ が存在して，$\psi(A)=\psi(E_\varphi(A|\mathfrak{M}))$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．

2° $\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分なとき，$\mathfrak{N}$ 上で $\varphi=\psi$ であることと $\mathfrak{M}$ 上で

$\varphi=\psi$ であることは同値.

$\mathcal{S}$ が忠実な状態 φ を含むとき：

3° $\mathfrak{M}$が $\mathcal{S}$ に関して十分であることと$\mathfrak{M}$が対 $\{\varphi, \psi\}$ $(\forall \psi \in \mathcal{S})$ に関して十分であることは同値.

4° $\mathfrak{M}$ が $\mathcal{S}$ に関して十分であれば，$\mathfrak{M}$ を含む任意の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}_0$ は，もし $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M}_0)$ が存在すれば，$\mathcal{S}$ に関して十分である.

1° は非常に有用な結果である．さらに，忠実な $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して，$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ が存在すれば，

5° $E_\varphi(\sigma_t{}^\varphi(A)|\mathfrak{M})=\sigma_t{}^\varphi(E_\varphi(A|\mathfrak{M}))$, $\forall A\in\mathfrak{N}$,

がわかる.

以下，次の記号を使う.

$$\mathfrak{N}_\alpha\equiv\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\alpha_t(A)=A,\ t\in\boldsymbol{R}\}$$

$$\mathfrak{N}_\varphi\equiv\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\sigma_t{}^\varphi(A)=A,\ t\in\boldsymbol{R}\}$$

$$\mathfrak{S}_\varphi\equiv\{\psi\in\mathfrak{S}\,;\,\text{ある } c>0 \text{ に対して } \psi\leqq c\varphi\}$$

ところで，任意の $\psi\ll\varphi$ に対して，$\mathfrak{N}$ には付随する正の自己共役作用素 T (i.e., $Q\,\mathrm{dom}\,T\subset\mathrm{dom}\,T$, $QT\subset QT$ $(\forall Q\in\mathfrak{N}')$，これを $T\eta\mathfrak{N}$ で表し，$T^*=T$ で $T\geqq0$ のときとくに $T\eta_+\mathfrak{N}$ と書く）が存在して

$$\psi(\cdot)=\varphi(T\cdot T)\ (=\varphi_T(\cdot) \text{ とおく}) \tag{9.28}$$

と表せることがわかっている（付章 4.2 項の〈定理 4.15〉）が，さらに，$\psi\in\mathfrak{S}_\varphi$ のとき，上の T は一意で，$T\in\mathfrak{N}_+$. 任意の $\varphi\in\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$ に対して，第 3 章の〈定理 3.6〉に対応するものとして，

〈定理 9.35〉 （1） $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ が存在し，$T\eta_+\mathfrak{M}$ である T が存在すれば $\mathfrak{M}$ は $\{\varphi,\varphi_T\}$ に関して十分である.

（2） φ が忠実で，$\varphi_T\in\mathfrak{S}_\varphi$ かつ $T\in\mathfrak{N}_+$ であり，さらに，$\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\varphi_T\}$ に関して十分であれば，$T\in\mathfrak{M}$ である.

証明 （1）：条件より，T のスペクトル測度を $\{E(\lambda)\}$ とし，

$T_n=\int_0^n\lambda dE\ (\lambda)\in\mathfrak{M}_+$ とおくと，$T=s-\lim_{n\to\infty}T_n$ で

$$\varphi_T(A)=\varphi(TAT)=\lim_{n\to\infty}\varphi(T_nAT_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(T_nE_\varphi(A|\mathfrak{M})T_n)$$
$$=\varphi(TE_\varphi(A|\mathfrak{M})T)=\varphi_T(E_\varphi(A|\mathfrak{M})),\quad \forall A\in\mathfrak{N}.$$

(2)：$\hat{\varphi}=\varphi\restriction\mathfrak{M}$, $\hat{\varphi}_T=\varphi_T\restriction\mathfrak{M}$ とおく．$\hat{\varphi}_T\in\mathfrak{S}_{\hat{\varphi}}$ となるから，$Q\in\mathfrak{M}_+$ が存在して $\hat{\varphi}_T=(\hat{\varphi})_Q$. ゆえに，$\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\varphi_T\}$ に関して十分であることより，

$$\varphi_T(A)=\varphi_T(E_\varphi(A|\mathfrak{M}))=\varphi(QE_\varphi(A|\mathfrak{M})Q)=\varphi(QAQ),\quad \forall A\in\mathfrak{N}.$$

よって，T の一意性より $T=Q$. ▌

十分性の概念を使って力学系を記述する定常状態及び KMS 状態を特徴付けることができるのである．

〈定理 9.36〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ が忠実であるとき，次が成立．

(1)　$\psi\in I(\sigma^\varphi)\Longleftrightarrow\mathfrak{N}_\varphi$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分．

(2)　$\mathfrak{N}_\varphi$ は $I(\sigma^\varphi)$ に関して最小十分．

証明　(1)：$\psi_1=(\varphi+\psi)/2$ とおくと ψ_1 は忠実であり，"$\psi\in I(\sigma^\varphi)\Longleftrightarrow\psi_1\in I(\sigma^\varphi)$" であり，"$\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分$\Longleftrightarrow\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\psi_1\}$ に関して十分" であることが容易にわかるから，ψ を忠実な状態と仮定してよい．$\sigma_t^\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)=\mathfrak{N}_\varphi$ であるから，$\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{N}_\varphi$ への条件付期待値 $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{N}_\varphi)$ が存在する．付章 4.2 項の〈定理 4.10〉より，$\psi\in I(\sigma^\varphi)$ であれば $T\eta_+\mathfrak{N}_\varphi$ が存在して $\psi=\varphi_T$. よって，〈定理 9.35〉より $\mathfrak{N}_\varphi$ は $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分．逆に，$\mathfrak{N}_\varphi$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分なとき，5° より $E_\varphi\circ\sigma_t^\varphi=\sigma_t^\varphi\circ E_\varphi$ だから

$$\psi(\sigma_t^\varphi(A))=\psi(E_\varphi(\sigma_t^\varphi(A)|\mathfrak{N}_\varphi))=\psi(\sigma_t^\varphi(E_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi)))$$
$$=\psi(E_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi))=\psi(A),\quad \forall A\in\mathfrak{N}.$$

(2)：(1) と 3° より，$\mathfrak{N}_\varphi$ は $I(\sigma^\varphi)$ に関して十分である．$\mathfrak{N}_\varphi$ の最小性を示すためには，$I(\sigma^\varphi)$ に関して十分である任意の部分代数 $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{N}_\varphi$ を含むことを示せばよい．$\varphi(Q^2)=1$ となる正の $Q\in\mathfrak{N}_\varphi$ に対して，$\psi=\varphi_Q$ とおくと，$\psi\in I(\sigma^\varphi)$. さらに，$\psi(A)\leqq\|Q\|^2\varphi(A)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) が示せ，したがって，$\psi\in\mathfrak{S}_\varphi$. 〈定理 9.35〉より，$Q\in\mathfrak{M}$. ゆえに，$\mathfrak{N}_\varphi\subset\mathfrak{M}$. ▌

Kovács–Szücs [K 3] の結果『$^w\overline{\mathrm{co}}\{\alpha_t(A)\,;\,t\in\boldsymbol{R}\}\cap\mathfrak{N}_\alpha=\{\mathcal{E}(A)\}$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) となり，$A\longmapsto\mathcal{E}(A)$ の対応は正規なノルムが 1 の射影で，$\varphi=\varphi\circ\mathcal{E}$ ($\forall\varphi\in I(\alpha)$)

を満たしている』より

〈系 9.37〉 $\mathfrak{N}_\alpha$ は $I(\alpha)$ に関して十分である.

〈定理 9.38〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ が忠実であるとき，次が成立.

（1） $\psi\in K(\sigma^\varphi)\Longleftrightarrow\mathcal{Z}\equiv\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}'$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分.

（2） $\mathcal{Z}$ は $K(\sigma^\varphi)$ に関して最小十分.

証明 （1）：前定理と同様，ψ は忠実としてよい．$\psi\in K(\sigma^\varphi)$ の場合は，付章 4 の〈定理 4.8〉より $T\eta_+\mathcal{Z}$ が存在して，$\psi=\varphi_T$と表せる．また，$\sigma_t^\varphi(\mathcal{Z})=\mathcal{Z}$ であるから，$E_\varphi(\cdot|\mathcal{Z})$ が存在する．ゆえに，〈定理 9.35〉の（1）より，$\mathcal{Z}$ は $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分である．逆に，$\mathcal{Z}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分なとき，$\mathfrak{N}_\varphi(\supset\mathcal{Z})$ も $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分である．よって，〈定理 9.36〉の（1）より，$\psi\in I(\sigma^\varphi)$．ゆえに，$T\eta_+\mathfrak{N}_\varphi$ が一意に存在して $\psi=\varphi_T$．なお，$\hat{\varphi}=\varphi\restriction\mathcal{Z},\hat{\psi}=\psi\restriction\mathcal{Z}$ とおくと，$\hat{\varphi},\hat{\psi}$ とも $\mathcal{Z}$ 上のトレースだから，$W\eta_+\mathcal{Z}$ が存在して，$\hat{\psi}=\hat{\varphi}_W$ と表せる．さらに，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，

$$\begin{aligned}\psi(A)&=\psi(E_\varphi(A|\mathcal{Z}))=\varphi(WE_\varphi(A|\mathcal{Z})W)\\&=\lim_{n\to\infty}\varphi(W_nE_\varphi(A|\mathcal{Z})W_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(W_nAW_n)=\varphi_W(A).\end{aligned}$$

ここで，W のスペクトル測度 $\{E(\lambda)\}$ に対して，$W_n\equiv\int_0^n\lambda dE(\lambda)$ である．この結果より，$T=W$．また，付章 4.2 項の〈定理 4.11〉と**註 1** より，$\sigma_t^\psi(\cdot)=T^{2it}\sigma_t^\varphi(\cdot)T^{-2it}=\sigma_t^\varphi(\cdot)$ となるから，$\psi\in K(\sigma^\varphi)$．

（2）は〈定理 9.36〉と同様にして示せる．▌

これらの定理より，次のよく知られた事実が示される．

〈系 9.39〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ が忠実なとき，次が成立する.

（1） σ^φ がエルゴード的（i.e., $\mathfrak{N}_\varphi=\boldsymbol{C}I$）$\Longleftrightarrow I(\sigma^\varphi)=\{\varphi\}$.

（2） $\mathfrak{N}$ がファクター（i.e., $\mathcal{Z}=\boldsymbol{C}I$）$\Longleftrightarrow K(\sigma^\varphi)=\{\varphi\}$.

次に，十分性と相対エントロピーの関連について論じよう．まず，相対エン

トロピーの単調性と，十分性の定義より直に，

〈定理 9.40〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ が忠実で，$\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分であれば，

$$S(\psi|\varphi)=S_{\mathfrak{M}}(\psi|\varphi).$$

〈定理 9.41〉 $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ において，

$$\|\varphi-\psi\|\leqq\sqrt{2S(\psi|\varphi)}.$$

〈証明〉 付章 4.2 項の〈定理 4.6〉より，$\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が一意に存在して，$\varphi-\psi=\varphi_1-\varphi_2$, $\|\varphi-\psi\|=\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|$ かつ $\mathrm{s}(\varphi_1)\mathrm{s}(\varphi_2)=0$. $\mathrm{s}(\varphi_1)=E$ とおくと，

$$\|\varphi-\psi\|=(\varphi-\psi)(E)-(\varphi-\psi)(I-E)=2(\varphi(E)-\psi(E)).$$

ここで，$\mathfrak{M}=\{E,I-E\}''$ とおくと，相対エントロピーの単調性より

$$S(\psi|\varphi)\geqq S_{\mathfrak{M}}(\psi|\varphi)=\psi(E)\log\frac{\psi(E)}{\varphi(E)}+\psi(I-E)\log\frac{\psi(I-E)}{\varphi(I-E)}.$$

第3章の〈定理 3.11〉の証明で見たように，

$$\sqrt{2}\left\{\psi(E)\log\frac{\psi(E)}{\varphi(E)}+\psi(I-E)\log\frac{\psi(I-E)}{\varphi(I-E)}\right\}^{1/2}\geqq2(\varphi(E)-\psi(E))$$

が成立する．ゆえに，$\sqrt{2S(\psi|\varphi)}\geqq\|\varphi-\psi\|$. ▮

この定理から，〈定理 9.28〉の（1）の結果，すなわち，“$S(\psi|\varphi)=0\Longleftrightarrow\psi=\varphi$” がわかる．

〈補題 9.42〉 $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ をともに忠実，$\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}_\varphi$，かつ，$\psi'\in\mathfrak{S}$ を $\psi'(\cdot)=\psi(E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M}))$ とする．$S_{\mathfrak{M}}(\psi|\varphi)<\infty$ のとき，

（1） $S(\psi|\psi')=S(\psi|\varphi)-S_{\mathfrak{M}}(\psi|\varphi)$；

（2） $\|\psi'-\psi\|\leqq\sqrt{2\{S(\psi|\varphi)-S_{\mathfrak{M}}(\psi|\varphi)\}}$.

〈証明〉 $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}_\varphi$ であるから，$\hat{\varphi}=\varphi\restriction\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{M}$ 上の忠実な正規トレースとなる．ゆえに，$Q\eta_+\mathfrak{M}$ が存在して，$\hat{\psi}(\equiv\psi\restriction\mathfrak{M})=\hat{\varphi}_Q$.

$Q=\int_0^\infty\lambda dE(\lambda)$, $Q_n=\int_0^n\lambda dE(\lambda)$ とおくと，$Q_n\in\mathfrak{M}$ であることから，$\psi'(A)$

$=\varphi_Q(A)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) がわかる．したがって，付章 4.2 項の 177 頁の**註 1** より $(D\psi' ; D\varphi)_t=Q^{2it}$．さらに，同じページの**註 2** より，

$$(D\psi' ; D\psi)_t=(D\psi' ; D\varphi)_t(D\varphi ; D\psi)_t=Q^{2it}(D\varphi ; D\psi)_t$$

また，モジュラー作用素を使うと，

$$(D\psi' ; D\psi)_t=\Delta_{x_{\psi'},x_\psi}{}^{it}\Delta_{x_\psi}{}^{-it},\quad (D\varphi ; D\psi)_t=\Delta_{x_\varphi,x_\psi}{}^{it}\Delta_{x_\psi}{}^{-it}$$

と表せるから，$\Delta_{x_{\psi'},x_\psi}{}^{it}=Q^{2it}\Delta_{x_\varphi,x_\psi}{}^{it}$ が得られる．（ここで x_ω は ω の巡回ベクトル）．さらに，$\sigma_t{}^\varphi(\cdot)=\Delta_{x_\varphi,x_\psi}{}^{it}\cdot\Delta_{x_\varphi,x_\psi}{}^{-it}$ であり $Q^{2it}\in\mathfrak{N}_\varphi$ であるから，$\Delta_{x_\varphi,x_\psi}{}^{it}Q^{2it}=Q^{2it}\Delta_{x_\varphi,x_\psi}{}^{it}$ となる．なお，$\hat{\varphi}$ は $\mathfrak{M}$ 上のトレースで，$\Delta_{x_{\hat\psi},x_{\hat\varphi}}=Q^2$ となるから，

$$S_{\mathfrak{M}}(\psi|\varphi)=-\langle x_{\hat\psi},\ \log\Delta_{x_{\hat\varphi},x_{\hat\psi}}x_{\hat\varphi}\rangle$$
$$=\langle x_{\hat\psi},\ \log Q^2x_{\hat\psi}\rangle=\langle x_\psi,\ \log Q^2x_\psi\rangle.$$

ゆえに，

$$S(\psi|\psi')=-\langle x_\psi,\ \log\Delta_{x_{\psi'},x_\psi}x_\psi\rangle$$
$$=-\langle x_\psi,\ \log\Delta_{x_\varphi,x_\psi}x_\psi\rangle-\langle x_\psi,\ \log Q^2x_\psi\rangle$$
$$=S(\psi|\varphi)-S_{\mathfrak{M}}(\psi|\varphi).$$

（2）は（1）と〈定理 9.41〉より明らか．▮

以上の定理および補題から，相対エントロピーを使って状態を特徴付けることができる．

〈定理 9.43〉 （1） $\varphi,\psi\in I(\alpha)$ のとき，$S(\psi|\varphi)=S_{\mathfrak{N}_\alpha}(\psi|\varphi)$.

（2） $\varphi,\psi\in K(\alpha)$ のとき，$S(\psi|\varphi)=S_{\mathfrak{Z}}(\psi|\varphi)$.

〈定理 9.44〉 $\varphi\in K(\alpha)$ と $\psi\in\mathfrak{S}$ に対して次が成立する．

（1） $S(\psi|\varphi)=S_{\mathfrak{N}_\alpha}(\psi|\varphi)<+\infty$ ならば，$\psi\in I(\alpha)$.

（2） $S(\psi|\varphi)=S_{\mathfrak{Z}}(\psi|\varphi)<+\infty$ ならば，$\psi\in K(\alpha)$.

定理9.43の証明 （1）：φ と ψ の台 $\mathrm{s}(\varphi)$，$\mathrm{s}(\psi)$ が $\mathrm{s}(\psi)\not\leq\mathrm{s}(\varphi)$ のときは $S(\psi|\varphi)=S_{\mathfrak{N}_\alpha}(\psi|\varphi)=+\infty$ となるから，$\mathrm{s}(\psi)\leq\mathrm{s}(\varphi)$ とする．ここで，$P=\mathrm{s}(\varphi)$，$\hat{\mathfrak{N}}=P\mathfrak{N}P$，$\hat{\alpha}=\alpha\restriction\hat{\mathfrak{N}}$ とおくと，$\hat{\varphi}\equiv\varphi\restriction\hat{\mathfrak{N}}$，$\hat{\psi}\equiv\psi\restriction\hat{\mathfrak{N}}$ ともに $\hat{\alpha}$-不変状態である．

また，$\hat{\varphi}$ は $\hat{\mathfrak{N}}$ 上で忠実だから，〈系 9.37〉より $\hat{\mathfrak{N}}_{\hat{\alpha}}(\equiv P\mathfrak{N}_\alpha P)$ は $\{\hat{\varphi},\hat{\psi}\}$ に関して十分である．よって，〈定理 9.40〉より，$S(\hat{\psi},\hat{\varphi})=S_{\hat{\mathfrak{N}}_{\hat{\alpha}}}(\hat{\psi}|\hat{\varphi})$．したがって，$S(\psi|\varphi)=S(\hat{\psi}|\hat{\varphi})$，$S_{\mathfrak{N}_\alpha}(\psi|\varphi)=S_{\hat{\mathfrak{N}}_{\hat{\alpha}}}(\hat{\psi}|\hat{\varphi})$ を示せばよい．$\Lambda(A)=PAP$ と $\mathfrak{N}$ から $\hat{\mathfrak{N}}$ への線形写像を定めると，これは，(9.9)，(9.10)，$\Lambda(I)=P$ を満たし（p. 67），$\varphi=\hat{\varphi}\circ\Lambda$，$\psi=\hat{\psi}\circ\Lambda$ であるから，〈定理 9.22〉より，$S(\psi|\varphi)\leqq S(\hat{\psi}|\hat{\varphi})$ となる．また，$\Xi:\hat{\mathfrak{N}}\to\mathfrak{N}$ を $\Xi(Q)=Q+\hat{\varphi}(Q)(I-P)$ と定めると，この Ξ も (9.9)，(9.10)，および $\Xi(P)=I$ を満たすから，同じ定理から，$S(\hat{\psi}|\hat{\varphi})\leqq S(\psi|\varphi)$ が成立する．ゆえに，$S(\psi|\varphi)=S(\hat{\psi}|\hat{\varphi})$ が成立する．同様にして，$S_{\mathfrak{N}_\alpha}(\psi|\varphi)=S_{\hat{\mathfrak{N}}_{\hat{\alpha}}}(\hat{\varphi}|\hat{\psi})$ も示せる．

（2）：$\varphi,\psi\in K(\alpha)$ だから，$\mathrm{s}(\varphi)$，$\mathrm{s}(\psi)\in\mathscr{Z}$ であり（1）と同様にして，$\mathrm{s}(\psi)\leqq\mathrm{s}(\varphi)=P$ の場合を考えればよい．また，$\hat{\mathfrak{N}}=\mathfrak{N}P$ とおき，$\hat{\mathfrak{N}}$ への制限 $\hat{\alpha},\hat{\varphi},\hat{\psi}$ を定めると，$\hat{\varphi}$ は忠実で，$\hat{\varphi}\in K(\hat{\alpha})$ とであるから，$\hat{\alpha}_t=\sigma_t{}^{\hat{\varphi}}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ となる．よって，〈定理 9.38〉より $\hat{\mathscr{Z}}=\mathscr{Z}P$ は $\{\hat{\varphi},\hat{\psi}\}$ に関して十分である．したがって，（1）と同様にして，

$$S(\psi|\varphi)=S(\hat{\psi}|\hat{\varphi})=S_{\hat{\mathscr{Z}}}(\hat{\psi}|\hat{\varphi})=S_{\mathscr{Z}}(\psi|\varphi).\ \blacksquare$$

定理9.44の証明 $\varphi\in K(\alpha)$ であるから，$\mathrm{s}(\varphi)\in\mathscr{Z}$．さらに，（1），（2）とも $S(\psi|\varphi)<+\infty$ であるから，$\mathrm{s}(\psi)\leqq\mathrm{s}(\varphi)$．また，前定理の証明において述べたように，$\varphi$ は忠実であると仮定してよい．ゆえに，$\alpha_t=\sigma_t{}^\varphi$，$\mathfrak{N}_\alpha=\mathfrak{N}_\varphi$ と考えうる．

さて，ψ が忠実なときは，〈補題 9.42〉より，（1）の場合が $\psi(\cdot)=\psi(E_\varphi(\cdot|\mathfrak{N}_\varphi))$，（2）の場合は $\psi(\cdot)=\psi(E_\varphi(\cdot|\mathscr{Z}))$ となる．したがって，1° と〈定理 9.36〉，および〈定理 9.38〉より，（1）のとき，$\psi\in I(\alpha)$，（2）のとき，$\psi\in K(\alpha)$ となる．ψ が忠実でない場合も少々計算することにより証明できるが，ここでは略する．（[H5] を参照．）$\blacksquare$

ところで C* 代数 $\mathscr{A}$ 上の状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して，φ を重心とする $\mathfrak{S}$ 上の正則な Borel 測度 μ_φ が存在して

$$\varphi=\int_{\mathfrak{S}}\omega\,d\mu_\varphi$$

と表せる（付章 4.6 項）が，2つの状態 $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ を重心とする測度 μ_φ,μ_ψ を

適当に選んで，第8章の5節のように，$S(\psi|\varphi)$ を計算することはできないであろうか？この間に対するひとつの答が次の定理である．

〈定理 9.45〉 上記の $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$，及び μ_φ, μ_ψ に対して，準中心測度（付章4.6項）ν が存在して，$\mu_\varphi, \mu_\psi \ll \nu$ であるとき，

$$S(\psi|\varphi) = S(\mu_\psi|\mu_\varphi).$$

証明 まず，$S(\mu_\psi|\mu_\varphi) \geqq S(\psi|\varphi)$ を示す．$\mathcal{A}$ から $\mathfrak{S}$ 上の連続函数空間 $C(\mathfrak{S})$ 上への線形写像 Λ を $\Lambda(A)(\omega) = \omega(A)$（$\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall \omega \in \mathfrak{S}$）で定める．このとき，$\Lambda$ の共役写像 Λ^* は，$\mathfrak{S}$ 上の確率測度 μ に対して，$\varphi(A) \equiv (\Lambda^*\mu)(A) \equiv \int_{\mathfrak{S}} \omega(A) d\mu$ で与えられる．この Λ は関係式 (9.9), (9.10) および $\Lambda(I) = 1$ を満たすから，〈定理 9.22〉より $S(\psi|\varphi) = S(\Lambda^*\mu_\psi|\Lambda^*\mu_\varphi) \leqq S(\mu_\psi|\mu_\varphi)$.

次に，逆の不等式 $S(\mu_\psi|\mu_\varphi) \leqq S(\psi|\varphi)$ を示す．条件より，ν はある $\rho \in \mathfrak{S}$ の中心 $\mathcal{Z}_\rho = \pi_\rho(\mathcal{A})'' \cap \pi_\rho(\mathcal{A})''$ の可換な v.N. 部分代数 $\mathcal{C}$ に付随する直交測度である（付章4.6項）．いま，θ_ν を $L^\infty(\mathfrak{S}, \nu)$ から $\mathcal{C}$ の上への

$$\langle x_\rho, \theta_\nu(f)\pi_\rho(A)x_\rho \rangle = \int_{\mathfrak{S}} f(\omega)\omega(A) d\nu, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall f \in L^\infty(\mathfrak{S}, \nu),$$

を満たす＊同型写像とする．$\mu_\varphi \ll \nu$ だから，$g_n = \min\{(d\mu_\varphi/d\nu)^{1/2}, n\}$ とおくと，

$$\int_{\mathfrak{S}} \omega(A) d\mu_\varphi = \lim_{n\to\infty} \langle \theta_\nu(g_n)x_\rho, \pi_\rho(\mathcal{A})\theta_\nu(g_n)x_\rho \rangle.$$

この $\{g_n\}$ は $L^2(\mathfrak{S}, \nu)$ において Cauchy 列をなすから，$x_{\mu_\varphi} = s\text{-}\lim \theta_\nu(g_n)x_\rho$ とおくと，$\varphi(A) = \langle x_{\mu_\varphi}, \pi_\varphi(A)x_{\mu_\varphi} \rangle$（$\forall A \in \mathcal{A}$）と表せる．同様にして，$x_{\mu_\psi} \in \mathcal{H}_\rho$ が存在して，$\psi(A) = \langle x_{\mu_\psi}, \pi_\rho(A)x_{\mu_\psi} \rangle$ と表せる．よって，φ, ψ とも $\pi_\rho(\mathcal{A})''$ 上へ正規な拡張（付章3.1項）$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ をもち，これらは $\tilde{\varphi}(\theta_\nu(f)) = \int_{\mathfrak{S}} f d\mu_\varphi$, $\tilde{\psi}(\theta_\nu(f)) = \int_{\mathfrak{S}} f d\mu_\psi$（$\forall f \in L^\infty(\mathfrak{S}, \nu)$）を満足する．したがって，〈定理 9.25〉と相対エントロピーの単調性より，

$$S(\psi|\varphi) = S(\tilde{\psi}|\tilde{\varphi}) \geqq S_{\mathcal{C}}(\tilde{\psi}|\tilde{\varphi}) = S(\mu_\psi|\mu_\varphi). \quad \blacksquare$$

この定理のひとつの応用として次の系が示せる．なお，$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{R})$ は $\mathcal{A}$ 上の強連続な一径数自己同型群とする．

〈系 9.46〉 $\varphi, \psi \in K(\alpha)$ で，μ_φ, μ_ψ が各々 φ, ψ の中心測度であるとき，

$$S(\psi|\varphi) = S(\mu_\psi|\mu_\varphi).$$

証明　$K(\alpha)$ は単体（付章 4.6 項）であるから，$\rho \equiv (\varphi+\psi)/2 \in K(\alpha)$ の中心測度は一意の極大測度である（付章 4.6 項の〈定理 4.41〉）．よって，$\nu = (\mu_\varphi + \mu_\psi)/2$ が $\rho = (\varphi+\psi)/2$ の中心測度となる．このことと〈定理 9.45〉より，この系が結論される．▌

第10章　作用素凸函数と作用素エントロピー

この章では Löwner による行列単調函数の研究に端を発した作用素単調函数，作用素凸函数のいくつかの結果を述べ，Nakamura–Umegaki [N4] によって導入された作用素エントロピーの凹性について議論する．

10.1　作用素凸函数

この節では，Löwner と Bendat–Shermann による作用素凸函数に関する結果を証明なしで記述することにする．この節の結果のほとんどは Bendat–Shermann [B4] による．

$f(t)$ を（開，閉あるいは，半開）区間 I において定義された有界実数値函数とする．いま，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役な作用素 A で，そのスペクトル集合 $\mathrm{Sp}(A)$ が区間 I に含まれているものの全体を $\mathcal{S}(I)$ で表す．このとき，f が**作用素単調**（operator monotone）**函数**であるとは $A \geqq B$ である任意の $A, B \in \mathcal{S}(I)$ に対して，$f(A) \geqq f(B)$ となる場合をいう．この作用素単調函数の全体を $\mathrm{OM}(I)$ で表すことにする．また $\mathcal{H}$ が n 次元であるとき，作用素単調函数を特に **n 次元（行列）単調函数**とよび，この函数の集合を $\mathrm{OM}_n(I)$ と書く．我々にとって興味あるのは $n \geqq 2$ の場合である．

$n \geqq 2$ のとき，単調函数 f は C^{2n-3} 級であり，$(2n-3)$ 次導函数も凸函数であることが Löwner によって示されている．さらに，$I=(a, b)$（$\forall a, b \in \boldsymbol{R}$）とすると，

〈定理 10.1〉（1）　$f \in \mathrm{OM}_n(a, b)$ である必要十分条件は任意の $\lambda_i, \mu_i \in (a, b)$（ただし，$\lambda_1 < \mu_1 < \cdots < \lambda_m < \mu_m$ $(1 \leqq \forall m \leqq n)$）に対して，行列 $[(f(\mu_j) - f(\lambda_i))/(\mu_j - \lambda_i)]_{i,j=1}^{m}$ の行列式が正．

（2） $f \in \mathrm{OM}(a,b) \Longleftrightarrow f \in \mathrm{OM}_n(a,b)$ $(\forall n)$.（ただし，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の n 次元閉部分空間をつくることによって $\mathrm{OM}_n(a,b)$ を考える.）

Dobsch [D8] はこの Löwner の結果（1）を次のように書き表した.

〈定理 10.2〉 $f \in \mathrm{OM}_n(a,b) \cap C^{2n-1}(a,b) \Longleftrightarrow$ 任意の $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{f^{(i+j+1)}(t)}{(i+j+1)!}\alpha_i\alpha_j \geqq 0 \quad (\forall t \in (a,b)).$$

この結果と〈定理 10.1〉の（2）より

〈定理 10.3〉 $f \in \mathrm{OM}(a,b) \Longleftrightarrow$ 任意の $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$ と $m \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\sum_{i,j=0}^{m} \frac{f^{(i+j+1)}(t)}{(i+j+1)!}\alpha_i\alpha_j \geqq 0 \quad (\forall t \in (a,b)).$$

この定理によって，（1） $f'(t)=0 \Longrightarrow f^{(n)}(t)=0$ $(\forall n \geqq 2)$，および，（2） $f^{(2m+1)}(t) \geqq 0$ $(\forall m \in \boldsymbol{N} \cup \{0\})$ が示せる．さらに，$f \in \mathrm{OM}(a,b)$ は C^∞ 級であり，$\mathrm{Im}\, z \neq 0$ $(z \in \boldsymbol{C})$ へ解析接続可能であることがわかる.

なお，$f \in \mathrm{OM}(a,b)$ のとき，$g(t)=f\left(\frac{1}{2}(b-a)t+\frac{1}{2}(b+a)\right)$ とおくと，$g(t) \in \mathrm{OM}(-1,1)$ となり，逆も成立するから，一般性を損うことなく $(a,b)=(-1,1)$ とおいてもよい.

このことから，$0 \in (a,b)$ としてよいので，0の周りで，$f(t)$ を展開して

$$f(t)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

と書ける．ここで，$a_1>0$ である．そうでなければ，上記の（1），（2）より $a_n=0$ $(\forall n)$ となり，$f(t)=f(0)$ となってしまう．なお，以下 $f(0)=0$ と仮定し，$f(t)$ の収束半径を R とする (i.e., $R^{-1} \equiv \limsup |a_n|^{1/n}$).

〈定理 10.4〉 $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ に対しては，$\boldsymbol{R}$ 上の Stieltjes 測度 μ が存在

して

$$f(t)=\int_{-1/R}^{1/R}\frac{t}{1-t\xi}\mu(d\xi) \tag{10.1}$$

と書ける．逆に，(10.1) と書ける f は $\mathrm{OM}(-R,R)$ の元である．

略証 $f\in\mathrm{OM}(-R,R)$ より，$f^{(n)}(0)/n!=a_n$ であるから，$\sum_{i,j=0}^{m}a_{i+j+1}\alpha_i\alpha_j \geqq 0$ $(m\in\boldsymbol{N}\cup\{0\},\alpha_i\in\boldsymbol{R})$ である．ゆえに，**Hamburger の積率問題**（たとえば，Widder [W4]）から $\boldsymbol{R}$ 上に測度 μ が存在して

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{n-1}\mu(d\xi)$$

$(\forall n\in\boldsymbol{N})$ と表せる．ここで，$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ の収束半径が R であることより，

$$a_n=\int_{-1/R}^{1/R}\xi^{n-1}\mu(d\xi)$$

となる．逆は，積分 (10.1) が有限分割の和の一様極限で表せることより証明される．▮

上の定理で，$\mu\left(\left(-\infty,-\frac{1}{R}\right)\right)=0$ であれば表現 (10.1) は一意である．また，$R=\infty$ のときは，$a_n=0$ $(\forall n\geqq 2)$ となるから $f(t)=a_1t$.

〈定理 10.3〉と〈定理 10.4〉から次の定理が証明される．

〈定理 10.5〉 $f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n\in\mathrm{OM}(-R,R)\Longleftrightarrow$ 任意の $\alpha_i\in\boldsymbol{R}$ と $m\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$ に対して，

$$\sum_{i,j=0}^{m}\frac{f^{(i+j+1)}(0)}{(i+j+1)!}\alpha_i\alpha_j\geqq 0.$$

さて，話を作用素凸函数に移そう．$\mathcal{S}(I)$ の任意の元 A,B と任意の実数 $\lambda\in[0,1]$ に対して，

$$f(\lambda A+(1-\lambda)B)\leqq\lambda f(A)+(1-\lambda)f(B) \tag{10.2}$$

であるとき，f を**作用素凸函数**であるといい，この函数の集合を $\mathrm{OC}(I)$ で表す．とくに，$\mathcal{H}$ が n 次元のとき，作用素凸函数を **n 次（行列）凸函数**とよび，

その集合を $\mathrm{OC}_n(I)$ で表す.

いま，異なる $t_1, t_2 \in (a, b)$ に対して,

$$f^{[1]}(t_1, t_2) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

と $f^{[1]}$ を定め，他の $t_3 (\neq t_1) \in (a, b)$ を考慮して,

$$f^{[2]}(t_1, t_2, t_3) = \frac{f^{[1]}(t_2, t_3) - f^{[1]}(t_2, t_1)}{t_3 - t_1}$$

と $f^{[2]}$ を定める．このとき，Krauss [K 4] は次の定理を証明した.

〈定理 10.6〉 $n \geqq 2$ のとき，$f \in \mathrm{OC}_n(a, b)$ である必要十分条件は $f \in C^2(a, b)$ かつ，任意の $1 \leqq m \leqq n$ なる整数 m と $m+1$ 個の点 $t_0, t_1, \cdots, t_m$ (ただし，$m = n$ のときは，t_0 は t_1 から t_n のどれかに一致する) に対して，行列 $[f^{[2]}(t_0, t_i, t_j)]_{i,j=1}^{m}$ の行列式が正.

この定理より，『$f \in \mathrm{OC}_n(a, b) \Longleftrightarrow$ 各 $t_0 \in (a, b)$ に対して，$f^{[1]}(\cdot, t_0) \in \mathrm{OM}_n(a, b)$』がわかり，よって

〈定理 10.7〉 $f \in \mathrm{OC}(a, b) \Longleftrightarrow$ 各 $t_0 \in (a, b)$ に対して，$f^{[1]}(\cdot, t_0) \in \mathrm{OM}(a, b)$.

したがって，作用素単調函数の場合と同様 $f \in \mathrm{OC}(a, b)$ は (a, b) において C^∞ 級になり，$0 \in (a, b)$，$f(0) = 0$ とすると，$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ と書ける．さらに,

〈定理 10.8〉 収束半径Rをもつ級数 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ に対して，$f \in \mathrm{OC}(-R, R)$ であることと，$\mathbf{R}$ 上の Stieltjes 測度 μ が存在して

$$f(t) = f'(0)t + \int_{-1/R}^{1/R} \frac{t^2}{1 - t\xi} \mu(d\xi)$$

と表せることとは同値である.

この定理と〈定理 10.4〉より

〈系 10.9〉 収束半径 R の級数 $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ に対して，$f\in \mathrm{OC}(-R,R) \Longleftrightarrow f(t)/t\in \mathrm{OM}(-R,R)$.

さらに，〈定理 10.8〉と〈定理 10.4〉および〈定理 10.5〉より次の結果が得られる.

〈定理 10.10〉 収束半径 R の級数 $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ において，$f\in \mathrm{OC}(-R,R)$ であることと，任意の $\alpha_i\in \boldsymbol{R}$ と $m\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$ に対して

$$\sum_{i,j=0}^{m} \frac{f^{(i+j+2)}(0)}{(i+j+2)!}\alpha_i\alpha_j \geqq 0$$

であることとは同値である.

ところで，$-f$ が作用素凸である函数を**作用素凹函数**とよぶ．ここで，作用素凸函数のいくつかの例をあげておこう.

例 1 $f(t)=at+b \Rightarrow \pm f\in \mathrm{OC}(\boldsymbol{R})$．さらに，$a\geqq 0$ ならば，$f\in \mathrm{OM}(\boldsymbol{R})$.

例 2 $f(t)=t^p (0\leqq p\leqq 1) \Rightarrow f\in \mathrm{OM}(0,\infty)$ かつ $-f\in \mathrm{OC}(0,\infty)$.

例 3 $f(t)=t^p (-1\leqq p\leqq 0,\ 1\leqq p\leqq 2) \Rightarrow f\in \mathrm{OC}(0,\infty)$.

例 4 $f(t)=t^2 \Rightarrow f\in \mathrm{OC}(\boldsymbol{R})$.

例 5 $f(t)=1/(\alpha-t)$，$\alpha\notin(a,b) \Rightarrow f\in \mathrm{OM}(a,b)$.

例 6 $f(t)=1/(t-\alpha)$，$\alpha<a \Rightarrow f\in \mathrm{OC}(a,b)$.

なお，次の定理はかなり有用である.

〈定理 10.11〉 $f\in \mathrm{OM}(0,\infty)$ かつ $f>0$ であれば，$1/f\in \mathrm{OC}(0,\infty)$ である.

略証 $f\in \mathrm{OM}(0,\infty)$ は〈定理 10.4〉よりある定数 α,β を使って，

$$f(t)=\alpha+\beta t+\int_{+\infty}^{0}\frac{1+t\xi}{\xi-t}\mu(d\xi)$$

と表せる．ところで，函数 $h(t)=\dfrac{1+t\xi}{\xi-t}=-\xi-\dfrac{1+\xi^2}{t-\xi}$ は（例6）より $-h\in \mathrm{OC}(0,\infty)$ であり，また，（例1）より $-(\alpha+\beta t)\in \mathrm{OC}(0,\infty)$ であるから，$-f\in \mathrm{OC}(0,\infty)$ となる．ゆえに，任意の $A, B\in\mathcal{S}(0,\infty)$ に対して，$f\left(\frac{1}{2}(A+B)\right)\geqq\frac{1}{2}\{f(A)+f(B)\}$ が成立する．したがって，$f\left(\frac{1}{2}(A+B)\right)^{-1}\leqq 2\{f(A)+f(B)\}^{-1}\leqq\frac{1}{2}\{f(A)^{-1}+f(B)^{-1}\}$ となる．よって $1/f\in \mathrm{OC}(0,\infty)$ である．▌

註　この節の議論は Löwner，Bendat-Shermann の論文以外にも Ando [A 3]，Davis [D 7]，Donogue [D 8] なども参考になる．

10.2　作用素エントロピー

Nakamura と Umegaki [N 4] は $f(t)=t\log t$ が区間 $(0,\infty)$ において（$f(0)=0$ とおけば $[0,\infty)$ で）作用素凸函数になることを示した．とくに，$A\in\mathcal{S}(0,\infty)$ に対して，$\hat{S}(A)=-A\log A$ を**作用素エントロピー**という．

〈定理 10.12〉　$f(t)=t\log t$ （$\forall t\in[0,\infty)$）とおくと（ただし，$0\log 0=0$），$f\in \mathrm{OC}([0,\infty))$．

この定理の証明には〈定理 10.10〉が基本的な役割を果たす．

〈補題 10.13〉　$f(t)=t\log(t+1)\in \mathrm{OC}(-1,1)$．

証明　$f^{(n)}(0)=(-1)^n(n-2)!n$ $(n=2,3,\cdots)$ より $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)t^n$ と書け，収束半径は $R=1$ となる．したがって，任意の $m\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$ と $\alpha_i\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$\sum_{i,j=0}^{m}\frac{f^{(i+j+2)}(0)}{(i+j+2)!}\alpha_i\alpha_j=\sum_{i,j=0}^{m}(-1)^{i+j}\frac{\alpha_i\alpha_j}{i+j+1}\geqq 0$$

がわかる（行列に関する Hilbert の公式による）．▌

〈補題 10.14〉 $f(t)=(t+1)\log(t+1)\in\mathrm{OC}(-1,1)$.

証明 $g(t)=f(t)-t$ とおくと，"$f\in\mathrm{OC}(-1,1)\Longleftrightarrow g\in\mathrm{OC}(-1,1)$" である．$g^{(n)}(0)=(-1)^n(n-2)!$ $(n=2,3,\cdots)$ となるから，任意の $m\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$ と $\alpha_i\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$\sum_{i,j=0}^{m}\frac{g^{(i+j+2)}(0)}{(i+j+2)!}\alpha_i\alpha_j=\sum_{i,j=0}^{m}(-1)^{i+j}\frac{\alpha_i\alpha_j}{(i+j+1)(i+j+2)}$$

が正であることを示せばよい．そのためには，行列

$$D_m=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1\cdot 2} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{m(m+1)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{m(m+1)} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(2m-1)\cdot 2m}\end{pmatrix}$$

が正定値であることを示せばよい．$p(x)=\prod_{k=1}^{m+1}(x-a_k)$ とおき，

$$D=\det\begin{pmatrix}\dfrac{1}{(x_1-a_1)(x_1-a_2)} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(x_1-a_n)(x_1-a_{n+1})}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{1}{(x_n-a_1)(x_n-a_2)} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(x_n-a_n)(x_r-a_{n+1})}\end{pmatrix}$$

および，$C=D\prod_{i=1}^{m}p(x_i)$ とおくと，C が (x_i-x_j) $(i\neq j)$ で割り切れ，D が (a_i-a_j) $(i-j\neq 1)$ で割り切れることが容易にわかる．したがって

$$C=(-1)^{m(m-1)/2}\frac{\prod_{m\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)\prod_{m+1\geq i>j\geq 1}(a_i-a_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_{j+1}-a_j)}$$

$$D=(-1)^{m(m-1)/2}\frac{\prod_{m\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)\prod_{m+1\geq i>j\geq 1}(a_i-a_j)}{\prod_{j=1}^{m}(a_{j+1}-a_j)\prod_{i=1}^{m}p(x_i)}\qquad(10.3)$$

が得られる．ここで，$x_i-a_j=i+j-1$ ととると，$x_i-a_j=x_j-a_i$ となるから，$x_i-x_j=i-j$，$a_i-a_j=j-i$，$a_{j+1}-a_j=-1$ がわかる．この場合，$\det D_m=D$ であるから，(10.3) より

$$\det D_m = (-1)^{m(m-1)/2} \frac{\prod_{m \geqq i > j \geqq 1} (i-j) \prod_{m+1 \geqq i > j \geqq 1} (j-i)}{\prod_{j=1}^{m} (-1)^j \prod_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{m+1} (i+k-1)}.$$

これは少々計算すると

$$\det D_m = \frac{\{(m-1)!\cdots 3!2!\}^3 m!}{(m+1)!\cdots(2m-1)!(2m)!} \geqq 0$$

となり目的が達せられた．▌

定理 10.12 の証明　スペクトルが $[0,2)$ に入る2つの作用素 A, B に対して，スペクトルが $(0,2)$ に入る作用素の列 $\{A_n\}, \{B_n\}$ が存在して，$A_n \xrightarrow{s} A$，$B_n \xrightarrow{s} B$. この A_n, B_n に対して，〈補題 10.14〉より

$$f(\lambda A_n + (1-\lambda) B_n) \leqq \lambda f(A_n) + (1-\lambda) f(B_n), \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

が成立する．$f(t)$ の $t \geqq 0$ における連続性と，$A_n \xrightarrow{s} A$，$B_n \xrightarrow{s} B$ より，任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$f(\lambda A + (1-\lambda) B) \leqq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B) \tag{10.4}$$

が成立する．さて，A, B を任意の正の作用素とすると，ある定数 k を使って，$A' = \dfrac{A}{k}$，$B' = \dfrac{B}{k}$ とおき，$\mathrm{Sp}(A') \subset [0,2)$．$\mathrm{Sp}(B') \subset [0,2)$ とできる．この A', B' は不等式 (10.4) を満たすから，

$$\left\{\lambda \frac{A}{k} + (1-\lambda) \frac{B}{k}\right\} \log \left\{\lambda \frac{A}{k} + (1-\lambda) \frac{B}{k}\right\}$$
$$\leqq \lambda \frac{A}{k} \log \frac{A}{k} + (1-\lambda) \frac{B}{k} \log \frac{B}{k}$$

となる．これを整理すると，任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$f(\lambda A + (1-\lambda) B) \leqq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

が成立する．▌

〈定理 10.12〉から，$\rho \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ に関して，$\hat{S}(\rho) = -\rho \log \rho$ は作用素凹函数であるから，$-\mathrm{tr}\, \rho \log \rho$ も凹函数になることがわかる．すなわち，〈定理 10.12〉はエントロピーの性質〈N.3〉(30 頁) より一般的なものである．

10.3 Jensen 型の不等式

2つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{L}$ 上の有界線形作用素の全体 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), \boldsymbol{B}(\mathcal{L})$ に対して，写像 Λ を $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から $\boldsymbol{B}(\mathcal{L})$ への正の線形写像とする．すなわち，$A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})_+ \equiv \{A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})\ ;\ A \geqq 0\}$ のとき $\Lambda(A) \in \boldsymbol{B}(\mathcal{L})_+$. さらに，$\Lambda$ が $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素を $\mathcal{L}$ 上の恒等作用素に移す (i.e., $\Lambda(I_{\mathcal{H}}) = I_{\mathcal{L}}$) とき，$\Lambda$ は**単位元を保存する**という．以下，単位元を保存する正の写像の全体を $P_1(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ で表すことにする．

次の Jensen 型の定理は応用範囲が広い [A3, N3].

〈定理 10.15〉 $\Lambda \in P_1(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ かつ $f \in \mathrm{OC}(a, b)$ であれば，任意の $A \in \mathcal{S}(a, b\ ;\ \mathcal{H})$ $(\subset \boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ に対して，$f(\Lambda(A)) \leqq \Lambda(f(A))$.

この定理の証明には次の補題が必要である．

〈補題 10.16〉 $\Lambda \in P_1(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ は次の性質を有している．

(1) $\Lambda : \mathcal{S}(a, b\ ;\ \mathcal{H}) \to \mathcal{S}(a, b\ ;\ \mathcal{L})$.

(2) $\Lambda(A^2) \geqq \Lambda(A)^2$, $\forall A \in \mathcal{S}(-\infty, \infty\ ;\ \mathcal{H})$.

(3) $\Lambda(A^{-1}) \geqq \Lambda(A)^{-1}$, $\forall A \in \mathcal{S}(0, \infty\ ;\ \mathcal{H})$.

証明 (1) は $\Lambda(I_{\mathcal{H}}) = I_{\mathcal{K}}$ より $\|\Lambda\| = 1$ であるから，$\|\Lambda(A)\| \leqq \|A\|$ となり明らか．

(2)：行列

$$\begin{pmatrix} \Lambda(A^2) & \Lambda(A) \\ \Lambda(A) & \Lambda(I_{\mathcal{H}}) \end{pmatrix}$$

が正定値であることを示せばよい．A のスペクトル分解を

$$A = \int_{\boldsymbol{R}} \lambda E(d\lambda)$$

とする．このとき，

$$A^2 = \int \lambda^2 E(d\lambda),\quad I_{\mathcal{H}} = \int E(d\lambda)$$

より

$$\begin{pmatrix} \Lambda(A^2) & \Lambda(A) \\ \Lambda(A) & \Lambda(I_{\mathcal{H}}) \end{pmatrix} = \int_{\boldsymbol{R}} \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \otimes \Lambda(E(d\lambda))$$

となる．ところで，任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \geqq 0$$

であるから，左辺の行列も正定値である．

（3）:（2）と同様，$0<\lambda<\infty$ のとき，

$$\begin{pmatrix} \Lambda(A) & \Lambda(I_{\mathcal{H}}) \\ \Lambda(I_{\mathcal{H}}) & \Lambda(A^{-1}) \end{pmatrix} \geqq 0$$

が示せる．▮

定理 10.15 の証明　一般性を失わずに $(a,b)=(-1,1)$ とできる．〈定理10.8〉より，ある定数 c_1, c_2 と測度 μ が存在して

$$f(t) = c_1 + c_2 t + \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{1-t\xi} \mu(d\xi)$$

と表せる．$A \in \mathcal{S}(-1,1\,;\mathcal{H})$ に対して，

$$\Lambda(f(A)) = c_1 + c_2\Lambda(A) + \int_{-1}^{1} \Lambda(A^2(I_{\mathcal{H}} - \xi A)^{-1}) \mu(d\xi)$$

$$f(\Lambda(A)) = c_1 + c_2\Lambda(A) + \int_{-1}^{1} \Lambda(A)^2(I_{\mathcal{L}} - \xi\Lambda(A))^{-1} \mu(d\xi)$$

より，$\Lambda(A^2(I_{\mathcal{H}} - \xi A)^{-1}) \geqq \Lambda(A)^2(I_{\mathcal{L}} - \xi\Lambda(A))^{-1}$ を任意の $\xi \in (-1,1)$ に対して示せばよい．$\xi=0$ のときは，〈補題 10.16〉の（2）．また $\xi \neq 0$ のときは，

$$\begin{aligned} \Lambda(A^2(I_{\mathcal{H}} - \xi A)^{-1}) &= -\xi^{-2} - \xi^{-1}\Lambda(A) + \xi^{-2}\Lambda((I_{\mathcal{H}} - \xi A)^{-1}) \\ &\geqq -\xi^{-2} - \xi^{-1}\Lambda(A) + \xi^{-2}(I_{\mathcal{L}} - \xi\Lambda(A))^{-1} \\ &= \Lambda(A)^2(I_{\mathcal{L}} - \xi\Lambda(A))^{-1}. \end{aligned}$$ ▮

第11章　量子論的チャンネルとエントロピー変化

情報を伝送する際，レーザーを使用することは，現代における最も有効な方法である．レーザー作用は典型的な量子効果であるから，量子力学を基盤とした通信の理論を構築することが必要となる．古典的な通信理論は第5章の 5.2 節で論じたように，確率測度の変換（この変換をチャンネルとよんだ）を基にして定式化されている．したがって，量子系においても，確率測度に対応するものである状態の力学的変化をかなり一般的な定式化の下で調べることが必要である．この状態の力学的変化を与える変換を，古典系の場合と同様，ここでもチャンネルとよぶ．

まず，11.1 節で，量子論的チャンネルを導入し，その性質を調べ，さらに，チャンネルによってある初期状態 φ が終状態 $\bar{\varphi}$ に変えられた場合，φ と $\bar{\varphi}$ との相関を記述する合成状態を構成する．11.2 節で，φ の有する情報（エントロピー）のうちのどれ程が $\bar{\varphi}$ へ正しく伝えられるかを示す量である相互エントロピーを，11.1 節で導入した合成状態を使って定め，その基本的性質について論ずる．最後の節では，いわゆる H 定理と関連するエントロピーの力学的変化を様々な角度から調べる．

総じて，この章の議論は，量子力学的通信理論の定式化を目差したものではあるが，実際は，通信過程とは直接係わりがない状態変化の一般論である．さらに，この章の話題は完全にでき上っているものではなく，これからの研究が期待されるものでもある．

11.1　チャンネルと合成状態

物理系の力学的振舞いは，状態（古典系での確率測度も含めて）の力学的変化によって記述される．古典系において，この状態の力学変化を調べ，それを

通信理論に適用したのが，第1章および第5章で論じた Shannon の理論とその測度論的拡張である．

第5章で論じたように，離散系におけるチャンネルは条件付確率分布 $\{p(j|i)\}$ によって，さらにより一般的な系におけるそれは写像 $\lambda: X\times\mathcal{F}_Y\to[0,1]$ によって与えられる．この節では，量子系におけるチャンネルを定式化し，相互エントロピーを定義するためにも必要である合成状態を導入する．

古典系におけるチャンネルと平均作用素との対応を与える第5章の〈定理5.6〉を基として，量子力学系のチャンネルを次のように定式化するのは自然であろう．$(\mathcal{A}, \mathfrak{S}(\mathcal{A}), \alpha)$，$(\mathcal{B}, \mathfrak{S}(\mathcal{B}), \tau)$ を2つの C^* 力学系（ただし，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が v.N. 代数であれば，$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$, $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ はそれぞれ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 上の正規状態の全体とする．また $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の単位元は混乱がなければともに I で表す）とし，状態の変換を与える $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ への写像 Λ^* が $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ へのある完全正写像 Λ（付章4.6節参照）の共役写像（i.e., $\Lambda^*\varphi(B)\equiv\varphi(\Lambda(B))$, $\forall B\in\mathcal{B}, \forall\varphi\in\mathfrak{S}(\mathcal{A})$）であるとき，この写像 Λ^* を**チャンネル**という．なお，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が v.N. 代数のときは，$\Lambda: \mathcal{B}\to\mathcal{A}$ に正規性（i.e., $B_\alpha\uparrow B\Rightarrow\Lambda(B_\alpha)\uparrow\Lambda(B)$）が必要となる．

さまざまな物理系における状態のほとんどすべての変換は，このチャンネルの特殊な場合であることがわかっている．

例 1　$\mathcal{A}=\mathcal{B}=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$，$\mathfrak{S}(\mathcal{A})=\mathfrak{S}(\mathcal{B})=\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ において，H を系の Hamiltonian とし，$U_t=e^{itH}$ とおく．このとき，任意の状態 $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ に対して，変換

$$\rho\to U_{-t}\rho U_t \ (\equiv\Lambda_t{}^*\rho) \tag{11.1}$$

はチャンネルである．

例 2　例1と同じ条件の下で，$Q\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ のスペクトル分解を $\sum q_nQ_n$ とする．このとき Q を ρ で測定すると，この状態 ρ は

$$\rho\to\sum Q_n\rho Q_n \quad (\equiv\Lambda_Q{}^*\rho) \tag{11.2}$$

に変わる（これを**量子観測**ということもある）．この変換 $\Lambda_Q{}^*$ はチャンネルである．

例 3 $\mathscr{A}$ を $\mathscr{B}$ の部分代数とし，$\mathscr{E}$ を $\mathscr{B}$ から $\mathscr{A}$ へのノルムが 1 の射影（付章 4.3 項）とする．このとき $\mathscr{E}$ の共役写像 $\mathscr{E}^*:\mathfrak{S}(\mathscr{A})\to\mathfrak{S}(\mathscr{B})$ はチャンネルである．

例 4 $(X,\mathscr{F}_X)$ をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の可測空間，$\boldsymbol{P}(X)$ を X 上の正則な確率測度の全体，$C(X)$ を X 上の連続函数の全体，さらに，$(\mathscr{A},\mathfrak{S}(\mathscr{A}))$ を C* 系とし，$x\in X\to\omega_x\in\mathfrak{S}(\mathscr{A})$ を $\mathscr{F}$-可測とするとき，

$$\Lambda^*\mu\equiv\int_X\omega_x\mu(dx),\quad \mu\in\boldsymbol{P}(X), \tag{11.3}$$

で定められる Λ^* は $\boldsymbol{P}(X)$ から $\mathfrak{S}(\mathscr{A})$ へのチャンネルで，通常 c.q.(classical-quantum)-チャンネルとよばれる．また，q.c.(quantum-classical)-チャンネル Λ^*；$\mathfrak{S}(\mathscr{A})\to\boldsymbol{P}(X)$ は次のように定められている：

$$\Lambda^*\varphi(\cdot)\equiv\varphi(M(\cdot)),\quad \varphi\in\mathfrak{S}(\mathscr{A}). \tag{11.4}$$

ここで，M は $\mathscr{F}_X$ から $\mathscr{A}$ への**正の** $\mathscr{A}$ **値測度**（**POM** と略する場合もある）で $M(Q)=\Lambda(1_Q)$ $(\forall Q\in\mathscr{F}_X)$ を満たしている．

以下，チャンネルの全体を $\boldsymbol{C}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ で表すことにする．また，$I(\alpha)$ を α-不変な状態の全体，$K(\alpha)$ を α-KMS 状態の全体とし，それらの端点の集合を $\mathrm{ex}\,I(\alpha)$，$\mathrm{ex}\,K(\alpha)$ で表す．

さて，古典系の場合に対応していくつかのチャンネルを導入しよう．

［定義 11.1］ チャンネル $\Lambda^*:\mathfrak{S}(\mathscr{A})\to\mathfrak{S}(\mathscr{B})$ において；

(Q.C.1) $\Lambda\circ\tau_t=\alpha_t\circ\Lambda$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ のとき，Λ^* は**定常的**であるという．定常チャンネルの全体を $\boldsymbol{C}_S(\mathscr{A},\mathscr{B})$，あるいは，単に $\boldsymbol{C}_S$ で表す．

(Q.C.2) $\Lambda^*\in\boldsymbol{C}_S(\mathscr{A},\mathscr{B})$ で，$\Lambda^*(\mathrm{ex}\,I(\alpha))\subset\mathrm{ex}\,I(\tau)$ であるとき，Λ^* は**エルゴード的**であるという．エルゴードチャンネルの全体を $\boldsymbol{C}_E(\mathscr{A},\mathscr{B})$，あるいは，単に $\boldsymbol{C}_E$ で表す．（この定義は第 5 章の 5.4 節のものより一般的である）

(Q.C.3) $\Lambda^*\in\boldsymbol{C}_S(\mathscr{A},\mathscr{B})$ で，$\Lambda^*(K(\alpha))\subset K(\tau)$ であるとき，Λ^* は **KMS** であるという．KMS チャンネルの全体を $\boldsymbol{C}_K(\mathscr{A},\mathscr{B})$，あるいは，単に $\boldsymbol{C}_K$ で

表す．

これらのチャンネルは容易に構成することができる．実際，$\mathrm{ex}\,I(\tau)\neq\emptyset$，(resp. $K(\tau)\neq\emptyset$) のとき，状態 $\psi\in\mathrm{ex}\,I(\tau)$ (resp. $\psi\in K(\tau)$) に対して，

$$\Lambda=(1\otimes\bar{\psi})\circ j$$
$$j(B)=I\otimes B,\quad \forall B\in\mathcal{B}$$

とおくと，Λ^* はエルゴード (resp. KMS) チャンネルである．

さて，$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ の部分集合 $\mathcal{S}$ において，$\varphi(A_1)=\varphi(A_2)$ ($\forall\varphi\in\mathcal{S}$) が成立するとき，$A_1$ と A_2 は $\mathcal{S}$ を法として等しいといい，$A_1=A_2 \pmod{\mathcal{S}}$ と書く．したがって，$\Lambda_1^*,\Lambda_2^*\in\boldsymbol{C}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ に対して，『$\Lambda_1^*=\Lambda_2^* \pmod{\mathcal{S}} \Longleftrightarrow \Lambda_1^*\varphi=\Lambda_2^*\varphi,\ \forall\varphi\in\mathcal{S}$』である．

〈定理 11.1〉 $\Lambda^*\in\boldsymbol{C}_E(\mathcal{A},\mathcal{B})$ であれば，Λ^* は $\boldsymbol{C}_S(\mathcal{A},\mathcal{B})$ の中で mod $I(\alpha)$ の意味で端点である．

証明　いま，$\Lambda_1^*,\Lambda_2^*\in\boldsymbol{C}_S(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と，$\lambda\in(0,1)$ が存在して，$\Lambda^*=\lambda\Lambda_1^*+(1-\lambda)\Lambda_2^*$ と表せたとする．このとき，任意の $\varphi\in\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ に対して，$\Lambda^*\varphi=\lambda\Lambda_1^*\varphi+(1-\lambda)\Lambda_2^*\varphi$．ところで，条件より，$\Lambda^*\in\boldsymbol{C}_E(\mathcal{A},\mathcal{B})$ であるから，$\Lambda^*\varphi\in\mathrm{ex}\,I(\tau)$ となる．また，$\Lambda_k^*\varphi\in I(\tau)$ ($k=1,2$) がわかるから，ゆえに，$\Lambda_1^*\varphi=\Lambda_2^*\varphi=\Lambda^*\varphi$ となる．集合 $I(\alpha)$ は $\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ の凸包の弱＊位相での閉包であるから，$\Lambda_1^*=\Lambda_2^*=\Lambda^* \pmod{I(\alpha)}$ が成立する．▮

〈定理 11.2〉 $\mathcal{B}$ が単純（すなわち，$\mathcal{B}$ は真の両側イデアルを含まない）であり，$\mathcal{A}=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ のとき，$\Lambda^*\in\boldsymbol{C}_E(\mathcal{A},\mathcal{B})$ であることと，Λ^* が mod $I(\alpha)$ の意味で $\boldsymbol{C}_S(\mathcal{A},\mathcal{B})$ の端点であることは同値である．

証明　Λ^* が mod $I(\alpha)$ の意味で $\boldsymbol{C}_S(\mathcal{A},\mathcal{B})$ の端点であれば，$\Lambda^*\in\boldsymbol{C}_E(\mathcal{A},\mathcal{B})$ であることを示せばよい．いま，$\Lambda^*\notin\boldsymbol{C}_E$ とすると，$\varphi\in\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ が存在して，$\Lambda^*\varphi\notin\mathrm{ex}\,I(\tau)$．よって，$\psi=\Lambda^*\varphi$ とおくと，$\psi_1,\psi_2\in I(\tau)$ と $\lambda\in(0,1)$ が存在して，$\psi=\lambda\psi_1+(1-\lambda)\psi_2$ と表せる．よって，ψ_k ($k=1,2$) は ψ で押えられる．ゆえに，付章 2.5 項の〈定理 2.14〉と付章 4.2 項の〈定理 4.7〉

および〈定理 4.10〉より $\{\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, x_\phi, u^\phi\}$ を GNS 表現とすると，$Q_k{}^\phi \in \pi_\phi(\mathcal{B})' \cap u^\phi(\boldsymbol{R})'$ が存在して；(i) $Q_k{}^\phi \geqq 0$；(ii) $\langle x_\phi, Q_k{}^\phi, x_\phi \rangle = 1$；(iii) $\psi_k(B) = \langle x_\phi, Q_k{}^\phi \pi_\phi(B) x_\phi \rangle$, $\forall B \in \mathcal{B}$. ところで，$\mathcal{B}$ は単純であるから，すべての表現 π_ϕ は忠実になる．そこで，$\Theta_\phi = \Lambda \circ \pi_\phi{}^{-1}$ とおくと，これは $\pi_\phi(\mathcal{B})$ から $\mathcal{A}$ への完全正写像である．条件 $\mathcal{A} = \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ より，この Θ_ϕ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_\phi)$ から $\mathcal{A}$ への完全正写像へ拡張できる（付章 4.5 項の 5°）．この拡張も同じ Θ_ϕ で表す．なお，任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して，$\Lambda^* \varphi = (\Theta_\phi \circ \pi_\phi)^* \varphi$, $\psi_k(B) = \Theta_\phi{}^* \tilde{\varphi}(Q_k{}^\phi \pi_\phi(B))$ が成立する（ただし，$\tilde{\varphi}$ は φ の自然な拡張）．ここで，$\Lambda_k{}^\phi = \Theta_\phi \circ Q_k{}^\phi \circ \pi_\phi$ とおくと，これは $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ への完全正写像となることが容易に示せる．さらに，写像

$$\bigoplus_{\varphi \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})} \Lambda_k{}^\phi \quad (\psi \equiv \Lambda^* \varphi)$$

を考える．ただし，$\psi \notin I(\tau)$ に対しては $\Lambda_k{}^\phi = \Lambda$ ととる．このとき，$\oplus \Lambda_k{}^\phi$ は $\mathcal{B}$ から $\oplus \mathcal{A}_\varphi$ ($\mathcal{A}_\varphi \equiv \mathcal{A}$) への完全正写像となる．ここで，$\oplus \mathcal{A}_\varphi$ から $\mathcal{A}$ への射影 E を $\omega(E(\oplus \Lambda_k{}^\phi(B))) = \omega(\Lambda_k{}^\omega(B))$, $\forall \omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ で定め，

$$\Lambda_k = E \circ \oplus \Lambda_k{}^\phi$$

とおくと，これは完全正写像である．さらに，$\Lambda_k{}^* \in \boldsymbol{C}_S(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ がわかる．したがって，$\Lambda^* = \lambda \Lambda_1{}^* + (1-\lambda) \Lambda_2{}^* (\mathrm{mod}\, I(\alpha))$ となり，条件に反する．ゆえに $\Lambda^* \in \boldsymbol{C}_E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ である．▌

なお，$\mathcal{B}_\tau$ を τ-解析的（付章 3.1 項）な元の集合とすると，定常チャンネル Λ^* に対して次が容易に示せる [O3].

1° $\Lambda^* \in \boldsymbol{C}_K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Longleftrightarrow \Lambda(\tau_t(B_1) B_2) = \Lambda(B_2 \tau_{t+i}(B_1)) \bmod K(\alpha)$, $\forall B_1 \in \mathcal{B}_\tau$, $\forall B_2 \in \mathcal{B}$.

2° $(\mathcal{A}, \alpha)$ が η-可換 (i.e., $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(C^*[\alpha_t(A), B] C) = 0$, $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$, $\forall \varphi \in I(\alpha)$) で，$\Lambda$ が $*$-準同型写像であれば，$\boldsymbol{C}_K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \boldsymbol{C}_E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

さて，初期状態（確率測度）$\mu \in \boldsymbol{P}(X)$ がチャンネル λ によって，状態 $\mu' \in \boldsymbol{P}(Y)$ に変化したとすると，μ' は

$$\mu'(\cdot) = \int_X \lambda(x, \cdot) \mu(dx) \tag{11.5}$$

で与えられ，μ と μ' の合成状態 μ'' は (5.14) で与えられる．この μ'' は，$Q_1 \times Q_2 \in \mathcal{F}_\Omega$ $(\Omega = X \times Y)$ に対しては，

$$\mu''(Q_1, Q_2) = \int_{Q_1} \lambda(x, Q_2)\mu(dx) \tag{11.6}$$

と表せる．

この合成状態を量子系において定式化する．いま，初期状態 φ と終状態 $\Lambda^*\varphi$ との合成状態を Φ とすると，この Φ は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 上の状態であり，少なくとも次の条件を満たさなければならない：

（i）　$\Phi(A \otimes I) = \varphi(A)$，$\forall A \in \mathcal{A}$.

（ii）　$\Phi(I \otimes B) = \Lambda^*\varphi(B)$，$\forall B \in \mathcal{B}$.

たとえば，φ と $\Lambda^*\varphi$ の直積 Φ_0（すなわち，$\Phi_0(A \otimes B) = \varphi(A)\Lambda^*\varphi(B)\ \forall A \in \mathcal{A}$，$\forall B \in \mathcal{B}$，で定められる $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 上の状態）は上の条件（i），(ii）を満たす．この Φ_0 を $\Phi_0 = \varphi \otimes \Lambda^*\varphi$ と書き，φ と $\Lambda^*\varphi$ の**自明な合成状態**という．しかしながら，Φ_0 は φ と $\Lambda^*\varphi$ との間に存在する相関を表示するものではない．では，この相関を顕示する **“真の” 合成状態**はどのように定式化できるであろうか？これに答えるため，第8章の5節で使った状態の端点分解を利用する．$\mathcal{S}$ を $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ のある弱 * コンパクトな凸部分集合とし，$\varphi \in \mathcal{S}$ の $\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ の元へのひとつの分解を

$$\varphi = \int_{(\mathrm{ex}\,\mathcal{S})} \omega\, d\mu \tag{11.7}$$

とする．この測度 μ は状態 φ をその “成分” に分解するある仕方を表している．ところで，分解された φ の成分が Λ^* によって，どのように変換されるかを見ることが，物理的にいって，合成状態を決める手だてである．そこで

$$\Phi_\mu = \int_{(\mathrm{ex}\,\mathcal{S})} \omega \otimes \Lambda^*\omega\, d\mu \tag{11.8}$$

とおくと，これは確かに，φ と $\Lambda^*\varphi$ の相関を表す合成状態になっている．さらに，この Φ_μ は古典系における合成状態 μ'' の拡張でもある．実際，$\mathcal{A} = C(X)$，$\mathcal{B} = C(Y)$，$\lambda(\cdot, Q) \in C(X)$ のとき，$\mathcal{S} = \boldsymbol{P}(X)$ ととると，$\mu \in \mathcal{S}$ の端点分解は一意であり，点 $x \in X$ に台をもつ Dirac 測度 δ_x を使って

$$\mu=\int_X \delta_x \mu(dx) \tag{11.9}$$

と表せる．このとき，$(\Lambda^*\delta_x)(Q_2)=\lambda(x,Q_2)$ $(\forall Q_2\in\mathcal{F}_Y)$ であることから，任意の $Q_1\in\mathcal{F}_X$，$Q_2\in\mathcal{F}_Y$ に対して，

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(Q_1,Q_2)&=\int_X \delta_x(Q_1)\Lambda^*\delta_x(Q_2)\mu(dx)\\&=\int_X 1_{Q_1}(x)\lambda(x,Q_2)\mu(dx)\\&=\int_{Q_1}\lambda(x,Q_2)\mu(dx)\end{aligned}$$

となり，(11.6) で与えられた μ'' と一致することがわかる．

とくに，$\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_1)_{+,1}$ において，ρ の純粋状態への分解のひとつを

$$\rho=\sum\lambda_n\rho_n$$

とする．すなわち，$\lambda_n\geqq 0$，$\sum\lambda_n=1$ で，$\rho_n^2=\rho_n\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_1)_{+,1}$．このとき，$\rho$ と $\Lambda^*\rho$ の合成状態は

$$\sigma=\sum\lambda_n\rho_n\otimes\Lambda^*\rho_n \tag{11.10}$$

で与えられる．この合成状態は通常の量子系において有用な役割を演ずるものである．

なお，この節での議論は文献 [O3, O6, O7] によっているが，文献 [G4, H3, H7, I5] なども参考になる．

11.2 相互エントロピーとその性質

初期状態 φ がチャンネル Λ^* によって $\Lambda^*\varphi$ へ変換されたとき，φ の有する情報のどれほどが終状態 $\Lambda^*\varphi$ に含まれているかを表す量である相互エントロピーを導入し，その基本的性質を調べることがこの節の目的である．この相互エントロピーによって，状態の力学的変化の一面が解明されるのである．相互エントロピーは，前節で導入した２つの合成状態 Φ_μ, Φ_0 および，第８章と第９章で論じたエントロピー，相対エントロピーを使って定式化することができる [O7] が，ここでは簡単のため，密度作用素 $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_1)_{+,1}$ とチャンネル Λ^* :

$\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_1)_{+,1}\to\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_2)_{+,1}$ に対する相互エントロピーを構成する．ただし，$\mathcal{H}_1$ は入力側の $\mathcal{H}_2$ は出力側の Hilbert 空間である．

ところで，Shannon の理論からもわかるように，その物理的意味から，相互エントロピーは，初期状態 φ のエントロピーが何等かの仕方で定義された場合のみ考える必要があるものである．したがって，状態 $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_1)_{+,1}$ の端点分解はいく通りもあるが，その中で，意味があるのは，$S(\rho)$ を定める次の Schatten 分解である（〈補題 8.4〉，式 (8.13) 参照）：

$$\rho=\sum\lambda_n E_n. \tag{11.11}$$

この Schatten 分解は，第8章で論じたように，一意ではないので，われわれの合成状態 (11.10) も ρ の分解の仕方 $\widetilde{E}=\{E_n\}$ に依存する．よって，合成状態を $\widetilde{E}$ を付して，

$$\sigma_{\widetilde{E}}=\sum\lambda_n E_n\otimes\Lambda^* E_n \tag{11.12}$$

で表す．また，自明な合成状態は

$$\sigma_0=\rho\otimes\Lambda^*\rho \tag{11.13}$$

と書く．そこで，初期状態 ρ，**チャンネル Λ^* に関する相互エントロピー**を

$$I(\rho\,;\,\Lambda^*)=\sup_{\widetilde{E}} S(\sigma_{\widetilde{E}}|\sigma_0) \tag{11.14}$$

で定める．ここで $S(\sigma_{\widetilde{E}}|\sigma_0)$ は (8.9) で定義される $\sigma_{\widetilde{E}}$ と σ_0 の相対エントロピーである．この相互エントロピーは Ohya [O5] によって導入されたもので，レーザー通信の定式化にも利用される．以下，相互エントロピーのいくつかの特質も議論することにする．そのために，チャンネル Λ^* に対するいくつかの概念が必要となる．

［定義 11.2］　チャンネル $\Lambda^*:\mathfrak{S}(\mathcal{A})\to\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ において；

(Q.C.4)　任意の互いに直交する状態 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ （$\varphi_1\perp\varphi_2$ と表す）に対して，$\Lambda^*\varphi_1\perp\Lambda^*\varphi_2$ となるとき，Λ^* は**直交的** (orthogonal) であるという．

(Q.C.5)　Λ^* が直交的でかつ単射であるとき，Λ^* は**確定的** (deterministic) であるという．

(Q.C.6)　任意の状態 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ に対して，$\Lambda^*\varphi_1=\Lambda^*\varphi_2$ となるとき，

Λ^* は $\mathcal{S}$ **に関して無秩序** (chaotic) であるという．とくに，$\mathcal{S}=\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ のとき，単に，Λ^* は**無秩序**であるという．

さて，(11.14) によって定義された相互エントロピーは次の性質を有する．

〈定理 11.3〉 次の不等式が成立する．

$$0 \leqq I(\rho\,;\Lambda^*) \leqq \min\{S(\rho),\ S(\Lambda^*\rho)\}.$$

〈定理 11.4〉 次が成立する．

(1)　Λ^* が確定的ならば，$I(\rho\,;\Lambda^*)=S(\rho)$．

(2)　Λ^* が無秩序ならば，$I(\rho\,;\Lambda^*)=0$．

(3)　ρ が忠実な定常状態で，ρ のすべての固有値が非縮退であるとき，Λ^* がエルゴード的ならば，$I(\rho\,;\Lambda^*)=S(\Lambda^*\rho)$．

これらの定理を証明するためには，次の補題が必要である．

〈補題 11.5〉 合成状態 $\sigma_{\tilde{E}}$ と σ_0 に対して，

$$S(\sigma_{\tilde{E}}|\sigma_0)=\sum\lambda_n S(\Lambda^*E_n|\Lambda^*\rho).$$

証明　ρ の固有ベクトルを含む $\mathcal{H}_1$ の CONS を $\{x_n\}$ とし，$\Lambda^*\rho$ の固有ベクトルを含む $\mathcal{H}_2$ の CONS を $\{y_m\}$ とする．さらに，$E_n=|x_n\rangle\langle x_n|$ が ρ の Schatten 分解 $\rho=\sum\lambda_n E_n$ を与えているものとする．このとき，$\{x_n\otimes y_m\}$ は $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ の CONS となり，これを使って，$S(\sigma_{\tilde{E}}|\sigma_0)=\mathrm{tr}\,\sigma_{\tilde{E}}(\log\sigma_{\tilde{E}}-\log\sigma_0)$ を計算すると，補題が得られる．▌

定理 11.3 の証明　$S(\sigma_{\tilde{E}}|\sigma)\geqq 0$ であるから，$I(\rho\,;\Lambda^*)\geqq 0$．〈補題 11.5〉より，

$$S(\sigma_{\tilde{E}}|\sigma_0)=\sum\lambda_n S(\Lambda^*E_n|\Lambda^*\rho)=S(\Lambda^*\rho)-\sum\lambda_n S(\Lambda^*E_n)$$

となるから，$I(\rho\,;\Lambda^*)\leqq S(\Lambda^*\rho)$．さらに，〈定理 9.22〉より，$S(\Lambda^*\rho_1|\Lambda^*\rho_2)\leqq S(\rho_1|\rho_2)$ ($\forall\rho_1,\rho_2\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}_1)_{+,1}$) であるから，

$$
\begin{aligned}
S(\sigma_{\tilde{E}}|\sigma_0) &= \sum \lambda_n S(\Lambda^* E_n | \Lambda^* \rho) \leqq \sum \lambda_n S(E_n|\rho) \\
&= \sum \lambda_n (\operatorname{tr} E_n \log E_n - \operatorname{tr} E_n \log \rho) \\
&= -\operatorname{tr} \rho \log \rho = S(\rho).
\end{aligned}
$$

したがって，$I(\rho\,;\,\Lambda^*) \leqq S(\rho)$. ∎

定理 11.4 の証明　(1)：Λ^* が確定的であれば，定義より，$\Lambda^* E_n$ は純粋状態で，$E_n \perp E_m$ のとき $\Lambda^* E_n \perp \Lambda^* E_m$ である．よって，$\Lambda^* \rho = \sum \lambda_n \Lambda^* E_n$ も Schatten 分解になるから，$S(\Lambda^* \rho) = -\sum \lambda_n \log \lambda_n = S(\rho)$ である．また，$S(\Lambda^* E_n) = 0$ であるから，$S(\sigma_{\tilde{E}}|\sigma_0) = S(\Lambda^* \rho) - \sum \lambda_n S(\Lambda^* E_n) = S(\Lambda^* \rho)$ となる．したがって，$I(\rho\,;\,\Lambda^*) = S(\rho)$.

(2)：Λ^* が無秩序であるから，$\Lambda^* E_n = \Lambda^* \rho$. ゆえに，

$$
\sigma_{\tilde{E}} = \sum \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n = \sum \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* \rho = \rho \otimes \Lambda^* \rho = \sigma_0.
$$

したがって，

$$
I(\rho\,;\,\Lambda^*) = \sup_{\tilde{E}} S(\sigma_{\tilde{E}}|\sigma_0) = S(\sigma_0|\sigma_0) = 0.
$$

(3)：ρ の Schatten 分解 $\rho = \sum \lambda_n E_n$ において，$\rho \in I(\alpha)$ であるから，条件より，$E_n \in I(\alpha)$ となる．したがって，$E_n \in \operatorname{ex} I(\alpha)$ である．ここで，Λ^* のエルゴード性より $\Lambda^* E_n \in \operatorname{ex} I(\tau)$. さらに，この $\Lambda^* E_n$ は純粋状態になることがわかる．よって，$S(\Lambda^* E_n) = 0$ より，$I(\rho\,;\,\Lambda^*) = S(\Lambda^* \rho)$. ∎

これらの定理より，相互エントロピー $I(\rho\,;\,\Lambda^*)$ は古典系の場合と同様それが満たすべきすべての性質を有していることがわかった．この相互エントロピーを量子力学的な通信過程に適用することも可能であるがここでは述べない．このことに関しては文献 [O5] を参照．さらに，通信過程の研究は，各々の立場から，文献 [G1, H3, H8, I5, T1] などでもなされている．

11.3　エントロピーの力学的変化

第1章で議論したように，自然現象は時間の流れに対して非可逆であるが，この非可逆性はエントロピーの増大という形で表すことができた．ところが，微視的力学系の基礎方程式の時間反転に関する不変性より，現実の非可逆性を厳密に解き明すことは困難である．したがって，エントロピー増大の法則の解

明も Markov 型の変換に関するそれを除けば大きな結果は得られていない.

この系では，まず，古典系における Markov 型の H 定理を証明し，その後量子系の場合について議論する.

いま，Ω の有限集合とし，Ω の各元が，時刻 t_0 で生起する確率分布を $\{p(\omega, t_0)\,;\,\omega\in\Omega\}$ とし，時刻 t_i から t_{i+1} の間に，$\omega\in\Omega$ から $\omega'\in\Omega$ へ移る遷移確率を $p(\omega', t_{i+1}|\omega, t_i)$ とする．ここで，これらの分布は次の Chapman-Kolmogorov の等式を満たすとする.

$$[\mathrm{C.K}]\quad p(\omega', t_{n+1})=\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega', t_{n+1}|\omega, t_n)p(\omega, t_n) \tag{11.15}$$

このとき，時刻 t_n でのエントロピー $S(t_n)$ は

$$S(t_n)=-\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega, t_n)\log p(\omega, t_n)$$

で与えられるが，これに関して次のH定理が成立する.

〈定理 11.6〉 ［C.K］が成立し，遷移確率 $\{p(\omega', t_{n+1}|\omega, t_n)\,;\,\omega', \omega\in\Omega\}$ が両側確率行列 (i.e., $\sum_{\omega}p(\omega', t_{n+1}|\omega, t_n)=1=\sum_{\omega'}p(\omega', t_{n+1}|\omega, t_n)$) のとき，

$$S(t_{n+1})\geqq S(t_n).$$

この定理の証明のためには，次の補題が必要である.

〈補題 11.7〉 2つの確率分布 $\{p_j\,;\,j=1,\cdots,n\}$ と $\{q_j\,;\,j=1,\cdots,n\}$ に対して，

$$\prod_{j=1}^{n}(p_j)^{q_j}\leqq\sum_{j=1}^{n}q_jp_j \tag{11.16}$$

証明 Jensen の不等式を凹函数 $t\longmapsto\log t$ に適用すると，

$$\sum_{j=1}^{n}q_j\log p_j\leqq\log\left(\sum_{j=1}^{n}q_jp_j\right)$$

ゆえに，(11.16) が成立する. ∎

定理 11.6 の証明 等式 (11.15) および (11.16) を使うと，

$$S(t_{n+1})=-\sum_{\omega'}p(\omega', t_{n+1})\log p(\omega', t_{n+1})$$

$$= -\sum_{\omega'}\sum_{\omega} p(\omega', t_{n+1}|\omega, t_n)p(\omega, t_n)\log p(\omega', t_{n+1})$$

$$= -\sum_{\omega} p(\omega, t_n)\log \prod_{\omega'} \{p(\omega', t_{n+1})\}^{p(\omega', t_{n+1}|\omega, t_n)}$$

$$\geqq -\sum_{\omega} p(\omega, t_n)\log \{\sum_{\omega'} p(\omega', t_{n+1})p(\omega', t_{n+1}|\omega, t_n)\}$$

$$\geqq -\sum_{\omega} p(\omega, t_n)\log p(\omega, t_n) = S(t_n).$$

最後の不等式は第1章の〈定理 1.2〉の（1）による．▮

なお，Ω が有限集合であるから，Ω の元の個数を $|\Omega|$ と書くと，次の系がすぐ導ける．

〈系 11.8〉　$S(t_n) \leqq \log|\Omega|$.

ところで，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$\mu(\Omega)$ が有限になる場合に，微分エントロピーの時間変化を考えてみよう．以下，f を $L^\infty(\Omega, \mu)$ に属する μ に関する密度函数$\left(\text{i.e.}, \int_\Omega f\, d\mu = 1\right)$とし，$T_t : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を $t \in \boldsymbol{R}$ をパラメーターとしてもつ可測変換とする．この T_t に関して，$\mu \circ T_t^{-1} = \mu$ であるとき，μ は定常であるという．さて，$f_t(\omega) = f(T_t\omega)$（$\forall \omega \in \Omega$）で f_t を定めると，f_t のエントロピーは，

$$S(f_t) = -\int_\Omega f_t(\omega)\log f_t(\omega)\, d\mu(\omega)$$

で与えられるが，これは μ が定常で，$\{T_t\,;\, t \in \boldsymbol{R}\}$ が群になるとき，

$$S(f) = -\int_\Omega f(\omega)\log f(\omega)\, d\mu(\omega)$$

に等しくなり，T_t に関してはエントロピーは不変である．したがって，変換 $\{T_t\,;\, t \in \boldsymbol{R}\}$ が群となる（孤立系の力学的発展は通常群となる）場合は，観測量等力学系の物理量になにも条件を付加しなければ，エントロピーの増大を説明することはできない．ところで，連続量をそのまま測定することなど物理的にできる相談ではない．したがって，観測量を測定精度の限界を考慮して，ある“平均化”を行ったものを調べれば十分であろう．この考えに従って f を $\mathcal{F}$ の σ 部分集合体 $\mathcal{G}$ に関して粗視化したもの $f^{\mathcal{G}}$ の力学的変化を取り扱うこと

が必要となる．数学的には，$f^{\mathcal{G}}$ は $E_\mu(f|\mathcal{G})$（すなわち，μ に関する $\mathcal{G}$-条件付期待値）のことであり，この変換$f\to f^{\mathcal{G}}$ はチャンネルである．

例 1：Ω のある分割 $\{\Omega_k\}$ に対して，$\mathcal{G}=\sigma(\{\Omega_k\})$ とすると，

$$f^{\mathcal{G}}(\omega)=\sum_k\left(\frac{1}{\mu(\Omega_k)}\int_{\Omega_k}f\,d\mu\right)1_{\Omega_k}(\omega).$$

〈定理 11.9〉 上述の記号の下で，$S(f^{\mathcal{G}})\geqq S(f)$.

証明 $E_\mu(\cdot|\mathcal{G})$ は条件付期待値だから，

$$S(f^{\mathcal{G}})=-\int_\Omega E_\mu(f|\mathcal{G})\log E_\mu(f|\mathcal{G})\,d\mu$$

$$=-\int_\Omega f\log E_\mu(f|\mathcal{G})\,d\mu$$

よって，

$$S(f^{\mathcal{G}})-S(f)=\int_\Omega f(\log f-\log f^{\mathcal{G}})\,d\mu\geqq 0. \quad \blacksquare$$

なお，任意の $A,B\in\mathcal{F}$ に対して，$A^t\equiv\{T_t\omega\,;\,\omega\in A\}$ とおく．このとき，μが

$$\lim_{t\to\infty}\mu(A^t\cap B)=\lim_{t\to\infty}\mu(A^t)\cdot\mu(B)/\mu(\Omega) \tag{11.17}$$

を満たすとき，μは**強混合性**をもつという．

〈定理 11.10〉 μが定常で，強混合性をもつとき，$\mathcal{G}=\sigma(\{\Omega_k\})$ であれば，

$$\lim_{t\to\infty}S(f_t{}^{\mathcal{G}})=\log\mu(\Omega).$$

証明 各 Ω_k において，

$$\int_{\Omega_k}f(T_t\omega)\,d\mu\to\frac{\mu(\Omega_k)}{\mu(\Omega)}\quad(t\to\infty) \tag{11.18}$$

が示せる．実際，$f(\omega)=\sum\alpha_j\cdot\dfrac{1}{\mu(A_j)}1_{A_j}(\omega)$（単函数）の場合，

$$\int_{\Omega_k}f(T_t\omega)\,d\mu=\int_{\Omega_k{}^t}f(\omega)\,d\mu=\sum_j\alpha_j\frac{1}{\mu(A_j)}\mu(\Omega_k{}^t\cap A_j)$$

$$\to\sum_j\alpha_j\frac{1}{\mu(A_j)}\cdot\mu(\Omega_k)\cdot\mu(A_j)\cdot\frac{1}{\mu(\Omega)}=\frac{\mu(\Omega_k)}{\mu(\Omega)}\quad(t\to\infty).$$

一般の f は単函数で近似できるので (11.18) が成立.

ゆえに,

$$f_t^{\mathcal{G}}(\omega)=\sum_k\left\{\frac{1}{\mu(\Omega_k)}\int_{\Omega_k^t} f\,d\mu\right\}1_{\Omega_k}(\omega)\to\frac{1}{\mu(\Omega)}\quad(t\to\infty).$$

したがって,

$$S(f_t^{\mathcal{G}})=-\int_\Omega f_t^{\mathcal{G}}\log f_t^{\mathcal{G}}\,d\mu\to\log\mu(\Omega).\ \blacksquare$$

註 1　$\mathcal{G}=\{\emptyset,\Omega\}$ とすると, $f^{\mathcal{G}}(\omega)=1/\mu(\Omega)$ となるから, 〈定理 11.9〉より. この場合のエントロピー $S(f^{\mathcal{G}})=\log\mu(\Omega)$ が最大であることがわかる. ゆえに, 〈定理 11.10〉は $S(f_t^{\mathcal{G}})$ が $t\to\infty$ の極限で最大値に達することをいっているが, この収束は単調とは限らない.

註 2　$\{T_t\}$ が群の性質をもたず, たとえば, あるの部分集合体 $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$ に関して, $\mathcal{A}^t=T_t\mathcal{A}$ とおくと, $\mathcal{A}^t\downarrow\mathcal{A}^\infty$ が成立する場合は, $f_t=E_\mu(f|\mathcal{A}^t)$ に対して, martingale の収束定理より

$$S(f_t)\uparrow S(f)\quad(t\to\infty)$$

となり, エントロピーが単調増大することがわかる.

ここで話を量子系に移そう. $\mathcal{H},\mathcal{L}$ を Hilbert 空間とし, Λ を $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から $\boldsymbol{B}(\mathcal{L})$ への単位元を保存する正の線形写像とする. このとき, $\eta(t)=-t\log t$ $(t\geqq0)$ に対して, 10 章の〈定理 10.12〉と〈定理 10.15〉より

$$\eta(\Lambda(A))\geqq\Lambda(\eta(A)),\quad\forall A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\tag{11.19}$$

が成立する. したがって, 〈定理 11.6〉に対応するものとして次の定理が成立する.

〈定理 11.11〉　Λ_t を $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ からそれ自身への線形正写像とし, $\{\Lambda_t\,;\,t\in\boldsymbol{R}^+\}$ が一径数半群で, 単位元を保存し, かつ, $\mathrm{tr}\,\Lambda_t(\rho)=\mathrm{tr}\,\rho$ $(\forall t\in\boldsymbol{R},\forall\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1})$ を満たすものとする. このとき,

$$S(\Lambda_t(\rho))\geqq S(\rho).$$

とくに, 状態 ρ が, 離散的なスペクトル分解をもつ作用系 $Q(\equiv\sum q_nQ_n)$ を観測することによって, $\rho_Q\equiv\sum Q_n\rho Q_n$ (これを以下, $\mathcal{E}_Q(\rho)$ とおく. これもチ

ャンネル）に変化するとき，〈定理 11.9〉の量子力学版として次の定理が Nakamura–Umegaki [N5] によって証明された．

〈定理 11.12〉 $S(\mathcal{E}_Q(\rho))\geqq S(\rho)$.

証明 $\mathcal{E}_Q(A)=\sum Q_nAQ_n$ $(\forall A\in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ とおくと，この $\mathcal{E}_Q$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から Q の生成する v.N. 代数 $\mathfrak{M}=\{Q\}''$ への "tr" に関する条件付期待値である．実際，$\mathcal{E}_Q(I)=I$ かつ，$\mathcal{E}_Q{}^2=\mathcal{E}_Q$ であることは定義より明らかであり，さらに，任意の $A\in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{E}_Q(A)Q_k=\mathrm{tr}(\sum Q_nAQ_n)Q_k=\mathrm{tr}\,Q_kAQ_k=\mathrm{tr}\,AQ_k$$

となるから，

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{E}_Q(A)B=\mathrm{tr}\,AB,\quad \forall B\in\mathfrak{M}$$

が成立し，$\mathcal{E}_Q$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から $\mathfrak{M}$ への条件付期待値となる．したがって，(11.19) と，等式 $\mathrm{tr}\,\mathcal{E}_Q(A)=\mathrm{tr}\,A$ より

$$\begin{aligned}S(\mathcal{E}_Q(\rho))&=\mathrm{tr}\,\eta(\mathcal{E}_Q(\rho))\\&\geqq\mathrm{tr}\,\mathcal{E}_Q(\eta(\rho))=\mathrm{tr}\,\eta(\rho)=S(\rho).\ \blacksquare\end{aligned}$$

この定理より，量子観測 $\rho\to\rho_Q$ は条件付期待値をとることに他ならず，また，観測によって系の状態はより混沌となることがわかった．

〈定理 11.13〉 $S(\mathcal{E}_Q(\rho))=S(\rho)\Longleftrightarrow\rho\in\{Q\}'$.

証明 $(\Leftarrow)$：$\rho\in\{Q\}'$ であるから，$\mathcal{E}_Q(\rho)=\rho$.

$(\Rightarrow)$：$\mathcal{E}_Q$ は tr に関する条件付期待値であるから，

$$\begin{aligned}S(\mathcal{E}_Q(\rho))&=-\mathrm{tr}\,\mathcal{E}_Q(\rho)\log\mathcal{E}_Q(\rho)\\&=-\mathrm{tr}\,\mathcal{E}_Q(\rho\log\mathcal{E}_Q(\rho))\\&=-\mathrm{tr}\,\rho\log\mathcal{E}_Q(\rho).\end{aligned}$$

したがって，$S(\mathcal{E}_Q(\rho))=S(\rho)$ であれば，

$$\mathrm{tr}\,\rho(\log\mathcal{E}_Q(\rho)-\log\rho)=0$$

となる．すなわち，相対エントロピーを使って表すと

$$S(\rho|\mathcal{E}_Q(\rho))=0.$$

$\operatorname{tr}\mathcal{E}_Q(\rho)=\operatorname{tr}\rho(=1)$ であるから，〈定理 9.28〉の（1），または〈定理 9.41〉より $\rho=\mathcal{E}_Q(\rho)$ となる．▮

$\mathcal{E}_Q(\rho)$ のエントロピー $S(\mathcal{E}_Q(\rho))$ を Ingarden と Urbanik [I3] は Q-エントロピーとよんだ．これは，$S(\rho)$ と同様，正値性，凹性，加法性，劣加法性を有する．たとえば，任意の $\rho_1,\rho_2\in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ と $\lambda\in[0,1]$ に対して，

$$S(\mathcal{E}_Q\{\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2\})=S(\lambda\mathcal{E}_Q(\rho_1)+(1-\lambda)\mathcal{E}_Q(\rho_2))$$
$$\leqq\lambda S(\mathcal{E}_Q(\rho_1))+(1-\lambda)S(\mathcal{E}_Q(\rho_2))$$

となり，凹性が示せた．他の性質も $S(\rho)$ の結果から容易に示せる．

前述の〈定理 11.11〉は，古典系の〈定理 11.9〉と同様，エントロピーの力学的変化のひとつの基礎となっているのである．これを見ておこう．いま，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の次元が有限である（$N\equiv\dim\mathcal{H}$）とし，状態 τ を

$$\tau(A)=\frac{\operatorname{tr}A}{N},\quad \forall A\in\mathfrak{N}=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$$

とおく．さらに，この状態 τ は系の力学的発展 α_t $(t\in\boldsymbol{R})$ に関して不変 (i.e., $\tau\circ\alpha_t=\tau$) であるとする．ここで，$\tilde{P}=\{P_n\}$ をある単位の分解とし，$\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ に対し，$\rho_t=\alpha_t(\rho)$，$p_j{}^t=\operatorname{tr}\rho_tP_j$，$\mathcal{E}_{\tilde{P}}(\rho)=\sum P_n\rho P_n$ とおくと

$$S(\mathcal{E}_{\tilde{P}}(\rho_t))=-\sum p_j{}^t\log\frac{p_j{}^t}{\operatorname{tr}P_j}$$

が簡単な計算によりわかる．ところで，τ が

$$\lim_{t\to\infty}\tau(\alpha_t(A)P_n)=\tau(A)\tau(P_n),\quad \forall A\in\mathfrak{N} \tag{11.20}$$

を満たすとき，τ は $\{P_n\}$ に対して強混合的であるというが，このとき，

$$p_j{}^t=\operatorname{tr}\rho_tP_j=N\tau(\alpha_t(\rho)P_j)\to N\tau(\rho)\tau(P_j)=\frac{\operatorname{tr}P_j}{N}$$

となるから，

$$S(\mathcal{E}_{\tilde{P}}(\rho_t))\to\log N$$

が出る．この結果は〈定理 11.10〉に対応するものである．

註 3　(11.20) より一般な条件

$$\lim_{t\to\infty}\tau(\alpha_t(A)B)=\tau(A)\tau(B)\quad \forall A,B\in\mathfrak{N}$$

は，$N \equiv \dim \mathcal{H} < +\infty$ のときは，$N=1$ のとき以外には成立しないことが簡単にわかる．

次に，$\rho \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ ($\dim \mathcal{H} < +\infty$ とは限らない) と，時間発展 α_t，および $T>0$ に対して

$$\rho_T = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_t(\rho)\,dt$$

とおくと，von Neumann エントロピーの凹性より

$$S(\rho_T) \geqq \frac{1}{T}\int_0^T S(\rho_t)\,dt = S(\rho)$$

となる．よって，$\rho_\infty = \lim_{T\to\infty} \rho_T$ が存在すれば，

$$S(\rho_\infty) \geqq S(\rho)$$

が求まる．ただし，通常の量子系では ρ_∞ は一般に存在しない．

さて，より一般的な定式化，すなわち，2つの C* 力学系 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}(\mathcal{A}), \alpha(\boldsymbol{R}))$ と $(\mathcal{B}, \mathfrak{S}(\mathcal{B}), \tau(\boldsymbol{R}))$ および，チャンネル $\Lambda^* : \mathfrak{S}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{B})$ に対して，状態 φ が $\Lambda^*\varphi$ に変化したとき，それらのエントロピーの間にはどのような関係があるかを調べよう．$\mathcal{S}_1$ を $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ の，$\mathcal{S}_2$ を $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ の弱＊コンパクト凸部分集合とする．とくに，$\mathcal{S}_1 = K(\alpha)$，$I(\alpha)$，$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$；$\mathcal{S}_2 = K(\tau)$，$I(\tau)$，$\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ の場合が重要である．また，以下の議論では，第8章の 8.5 節で導入した，von Neumann エントロピー $S(\rho)$ の拡張である状態 φ のエントロピー $S^{\mathcal{S}_1}(\varphi)$ の力学的変化を考察する．すなわち，Λ^* が $\mathcal{S}_1$ を $\mathcal{S}_2$ へ移すとき，$S^{\mathcal{S}_1}(\varphi)$ と $S^{\mathcal{S}_2}(\Lambda^*\varphi)$ の大小関係を考察することが主たる目的となる．しかしながら，〈定理 11.11〉で述べた場合を除けば，$S^{\mathcal{S}_1}(\varphi)$ と $S^{\mathcal{S}_2}(\Lambda^*\varphi)$ の大小を与える物理的に有意義な条件はまだ見出されていない．したがってここでは，Λ^* が $\mathcal{S}_1$ を $\mathcal{S}_2$ に1対1にうつす場合，$S^{\mathcal{S}_1}(\varphi)$ の定義から，他に何らかの条件が加われば，$S^{\mathcal{S}_1}(\varphi) = S^{\mathcal{S}_2}(\Lambda^*\varphi)$ となることが直観的に期待されるが，この等式が成立する条件を求める．言い換えれば，$S^{\mathcal{S}}(\varphi)$ が状態の力学的変化の下で“不変量”となる条件を明らかにすることがここでの課題である．

〈定理 11.14〉　チャンネル $\Lambda^*\in \boldsymbol{C}_S(\mathcal{A},\mathcal{B})$ に対して，次が成立する．

（1）　Λ^* が単射で，Λ が $*$-準同型であるとき，

$$S^{K(\alpha)}(\varphi)=S^{K(\tau)}(\Lambda^*\varphi),\quad \forall\varphi\in K(\alpha).$$

（2）（1）と同じ条件の下で，任意の G-可換な $\varphi\in I(\alpha)$ に対して，

$$S^{I(\alpha)}(\varphi)=S^{I(\tau)}(\Lambda^*\varphi).$$

（3）　Λ^* が $\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ から $\mathrm{ex}\,I(\tau)$ への全単射で $\Lambda^*\in\boldsymbol{C}_E$ であるとき，

$$S^{I(\alpha)}(\varphi)=S^{I(\tau)}(\Lambda^*\varphi),\quad \forall\varphi\in I(\alpha).$$

（4）　Λ^* が全単射であるとき，

$$S(\varphi)=S(\Lambda^*\varphi),\quad \forall\varphi\in\mathfrak{S}(\mathcal{A}).$$

この定理の証明には次の簡単な補題が必要である．

〈補題 11.16〉　チャンネル $\Lambda^*:\mathfrak{S}(\mathcal{A})\to\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ において，次が成立する．

（1）　Λ^* が全射 $\Longleftrightarrow$ Λ が単射．

（2）　Λ^* が単射 $\Longleftrightarrow$ Λ が全射．

（3）　Λ^* が全単射 $\Longleftrightarrow$ Λ が全単射．

この補題の証明は読者にまかせる．ここでは〈定理 11.15〉の（1）のみ証明を与えておこう．他の結果の証明は文献［O4］を参照．

定理 11.15 の（1）の証明：第8章の 8.5 節で述べたように，$\varphi\in K(\alpha)_d$ に対して議論すればよい．この φ の端点分解を $\varphi=\sum\lambda_n\varphi_n$ （$\varphi_n\in\mathrm{ex}\,K(\alpha)$）とする．$\Lambda$ と Λ^* の条件より，$\Lambda^*\varphi_n\in K(\tau)$ であり，$\Lambda^*\varphi_n\neq\Lambda^*\varphi_m$ （$n\neq m$）である．したがって，$\Lambda^*\varphi_n\in\mathrm{ex}\,K(\tau)$ （$\forall n$）を示せばよい．$\varphi\in\mathrm{ex}\,K(\alpha)$ とし，$\phi=\Lambda^*\varphi$ とおく．$\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi\}$，$\{\mathcal{H}_\phi,\pi_\phi,x_\phi\}$ をそれぞれ φ,ϕ の GNS 表現，$\Lambda_{\varphi,\phi}$ を $\pi_\phi(\mathcal{B})x_\phi$ から $\mathcal{H}_\varphi$ への写像で，$\Lambda_{\varphi,\phi}\pi_\phi(Q)x_\phi=\pi_\varphi(\Lambda(Q))x_\varphi$ を満たすものとする．このとき，任意の $Q\in\mathcal{B}$ に対して，

$$\|\Lambda_{\varphi,\phi}\pi_\phi(Q)x_\phi\|=\|\pi_\phi(Q)x_\phi\|$$

がわかる．よって，$\Lambda_{\varphi,\phi}$ は等距離写像である．また，Λ^* が単射であるから，

〈補題 11.16〉より，Λ は全射となり，$\{\pi_\varphi(\Lambda\mathcal{B})x_\varphi\}^- = \mathcal{H}_\varphi$ となる．ゆえに $\Lambda_{\varphi,\phi}$ は $\mathcal{H}_\phi$ から $\mathcal{H}_\varphi$ へのユニタリー作用素とみなせる．さらに，任意の $B, C \in \mathcal{B}$ に対して

$$\Lambda_{\varphi,\phi}\pi_\phi(B)\Lambda_{\varphi,\phi}{}^*\pi_\varphi(\Lambda(C))x_\varphi = \pi_\varphi(\Lambda(B))\pi_\varphi(\Lambda(C))x_\varphi$$

となり，よって，$\Lambda_{\varphi,\phi}\pi_\phi(B)\Lambda_{\varphi,\phi}{}^* = \pi_\varphi(\Lambda(B))$ （$\forall B \in \mathcal{B}$）が成立する．この等式より，$\Lambda^*$ が単射であることから，

$$\pi_\varphi(\mathcal{A})'' \cap \pi_\varphi(\mathcal{A})' = \Lambda_{\varphi,\phi}(\pi_\phi(\mathcal{B})'' \cap \pi_\phi(\mathcal{B})')\Lambda_{\varphi,\phi}{}^*$$

がわかる．したがって，$\varphi \in \mathrm{ex}\, K(\alpha)$ ならば $\phi = \Lambda^*\varphi \in \mathrm{ex}\, K(\tau)$ となる．▌

この定理は，前述したように，エントロピー $S^S(\varphi)$ が力学的不変量になるためいくつかの十分条件を与えているものであるが，この不変量を使って，力学系，$(\mathcal{A}, \mathfrak{S}(\mathcal{A}), \alpha)$ の何らかの意味での分類が可能であるかもしれない．こういった分類の問題はエントロピーと関連して，よく議論されてきたがかなり興味ある問題である．

なお，状態の平衡への近接という非平衡統計力学の問題と相対エントロピーおよび相互エントロピーの時間変化とに深い関連があることが知られているが，ここでは割愛する．

第12章　その他のエントロピー

前章までは，量子系を記述する状態のもつ不確定さ，言い換えれば，情報を表示する量としてのエントロピーを様々な角度から議論してきた．これらのエントロピーは von Neumann エントロピーから端を発したものであった．この章では，系の有する情報を顕しているとはいえないが，エントロピーの主要な性質を有している函数（12.1 節）や，状態のエントロピーではなく，変換のエントロピー（12.2 節），および，エントロピーの格子系への応用（12.3 節）が論ぜられる．総じて，ここで取り扱われるエントロピーは von Neumann エントロピーと直接的にそれほど係わりのないものか，それの物理系への応用である．なお，この章の結果の多くは証明なしで述べられている．

12.1　Segal エントロピー

第4章の 4.2 節で論じた Boltzmann-Gibbs エントロピーおよび，第8章で論じた v.N. エントロピーのひとつの拡張として Segal のエントロピーとよばれるものがある．このエントロピーは Segal [S6] によって導入され，以後多くの研究者 [D7, R7, U7, U8, O2] によって調べられてきた．

Segal エントロピーは微分エントロピーと同様，正値性をもたず，その意味で，系のもつ“不確定さ”，“乱雑さ”を表す量という物理的性質を有していない．しかしながら，それは，エントロピーとしての他の主要な性質は所持しており，数学的にはかなり興味ある対象である．この節では，Segal のエントロピーの諸性質およびその特徴付けについて論ずるが，ここでの結果は Segal [S6]，Umegaki [U8]，Ruskai [R7]，Ochs-Spohn [O2] によっている．

$\mathfrak{N}$ を半有限かつ σ-有限な v.N. 代数，τ を忠実な正規半有限トレースとする（詳細は付章 2.9 項参照）．このとき，任意の $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$（$\mathfrak{N}$ 上の正の正規線形

汎函数の全体（付章 2.7 項））に対して，**Radon-Nikodym 微分** $T_\varphi=\dfrac{d\mu}{d\tau}\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が一意に存在して，$\varphi(A)=\tau(T_\varphi A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ と表せることが知られている(p. 175)．いま，$\mathfrak{N}$ 上の正規状態 φ(すなわち，$\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ で $\varphi(I)=1$)の全体を $\mathfrak{S}$，$\mathfrak{S}$ の元 φ で $T_\varphi\in\mathfrak{N}_+$ となるものの全体を $\mathfrak{S}_0$，$\mathfrak{S}_0$ の元 φ で T_φ が n 個の直交する射影作用素 $\{E_k\}_{k=1}^n$（ただし，$\tau(E_k)<+\infty$）を使って，$T_\varphi=\sum_{k=1}^n \lambda_k E_k$ と書けるものの全体を $\mathfrak{S}_d$ で表すことにする．このとき，$\mathfrak{S}=\overline{\mathfrak{S}}_0=\overline{\mathfrak{S}}_d$（閉包は $\mathfrak{N}^*$ のノルムに関するもの）および，$\|\varphi\|=\|T_\varphi\|_1$ $(\forall\varphi\in\mathfrak{S}_0)$ が容易にわかる．

さて，T_φ のスペクトル分解を

$$T_\varphi=\int_0^\infty \lambda\, dE_\varphi(\lambda) \tag{12.1}$$

とし，

$$S_\tau(\varphi)=-\int_{+0}^\infty \lambda\log\lambda\, d\tau(E_\varphi(\lambda)) \tag{12.2}$$

とおく．この $S_\tau(\varphi)$ を φ の（τ に関する）**Segal のエントロピー**とよぶ．$S_\tau(\varphi)$ は，$T_\varphi\in\mathfrak{N}_+$（すなわち，$\varphi\in\mathfrak{S}_0$），あるいは $(\mathfrak{N},\tau)$ が有限なとき，次のように書くこともできる．

$$S_\tau(\varphi)=\tau(\eta^+(T_\varphi))-\tau(\eta^-(T_\varphi)). \tag{12.3}$$

ここで，$\eta(T_\varphi)=-T_\varphi\log T_\varphi$ であり，$\eta^+(T_\varphi)$ は $\eta(T_\varphi)$ の正の部分，$\eta^-(T_\varphi)$ は $(-\eta(T_\varphi))^+$ である．さらに，(12.3) は τ を適当な仕方で線形汎函数に拡張して（付章 2.9 項の〈定理 2.33〉）

$$S_\tau(\varphi)=\tau(\eta(T_\varphi)) \tag{12.4}$$

と表すこともある．以下，簡単のため，φ,ψ は $\mathfrak{S}_0$ の元とする．

この $S_\tau(\varphi)$ は v.N. エントロピーとほとんど同様な性質を有する．

〈1〉 **不変性**：2つの半有限な $(\mathfrak{N}_k,\tau_k,\mathfrak{S}_k)$ $(k=1,2)$ と $\varphi_k\in\mathfrak{S}_{k,0}$ において，$\mathcal{A}_k=\{T_{\varphi_k}\}''$ とおく．このとき，$\mathcal{A}_1$ から $\mathcal{A}_2$ への * 同型写像 ξ が存在して，$\tau_1(Q^*Q)=\tau_2(\xi(Q^*Q))$，$\varphi_1(Q)=\varphi_2(\xi(Q))$ $(\forall Q\in\mathcal{A}_1)$ が満たされれ

ば，$S_{\tau_1}(\varphi_1)=S_{\tau_2}(\varphi_2)$.

証明　τ_2 が忠実であることと，条件より，$T_{\varphi_2}=\xi(T_{\varphi_1})$ となる．したがって，$E_{\varphi_2}(\lambda)=\xi(E_{\varphi_1}(\lambda))$ より $S_{\tau_2}(\varphi_2)=S_{\tau_1}(\varphi_1)$. ▮

〈2〉 **凹性**：$S_\tau(\lambda\varphi+(1-\lambda)\psi)\geqq\lambda S_\tau(\varphi)+(1-\lambda)S_\tau(\psi)$，$\forall\lambda\in(0,1)$.

証明　〈定理 10.12〉より $\eta(T_{\lambda\varphi+(1-\lambda)\psi})\geqq\lambda\eta(T_\varphi)+(1-\lambda)\eta(T_\psi)$. したがって，$S_\tau(\varphi)$ は凹函数．▮

〈3〉 **連続性**：$\varphi,\omega\in\mathfrak{S}_0$，$\{\varphi_k\}_{k\in N}\subset\mathfrak{S}_d$ が次の条件を満たすとする：(i) $S_\tau(\omega)<+\infty$；(ii) $T_\varphi, T_\omega, T_{\varphi_k}$ $(k=1,2,\cdots)$ が互いに可換；(iii) $\lim_{k\to\infty}\|\varphi_k-\varphi\|=0$；(iv) ある定数 $c>0$ が存在して，$\varphi_k\leqq\varphi+c\omega$. このとき，

$$\lim_{k\to\infty}S_\tau(\varphi_k)=S_\tau(\varphi).$$

証明　$\mathcal{C}=\{T_\varphi, T_\omega, T_{\varphi_k}\ (k=1,2,\cdots)\}''$ とおくと，これは可換な v.N. 代数だから，ある測度空間 (Ω,m) が存在して，$\mathcal{C}\cong L^\infty(\Omega,m)$ と書ける．$\mathcal{C}$ より $L^\infty(\Omega,m)$ への＊同型写像を θ とし，$\mu=\tau\circ\theta^{-1}$ とおくと，$\tau(Q)=\int_\Omega\theta(Q)d\mu$ $(\forall Q\in\mathcal{C})$ と表せる．さらに，任意の自己共役作用素 $A\in\mathcal{C}$ とそのスペクトル測度 $E_A(\cdot)$ に対して，$\sigma_A=\mu\circ\theta(A)^{-1}$ とおくと，

$$\tau(E_A(\lambda))=\int_\Omega\theta(E_A(\lambda))d\mu=\int_R 1_{(-\infty,\lambda)}d\sigma_A(\lambda)$$

より，

$$-\int_{+0}^\infty\lambda\log\lambda\,d\tau(E_A(\lambda))=-\int_0^\infty\lambda\log\lambda\,d\sigma_A=-\int_\Omega\theta(A)\log\theta(A)d\mu$$

となる．したがって，

$$S_\tau(\varphi)=-\int_\Omega\theta(T_\varphi)\log\theta(T_\varphi)d\mu.$$

同様にして，$S_\tau(\varphi_k)$，$S_\tau(\omega)$ が θ を使って表現でき，後は通常の収束に関する議論で証明が完成する．▮

2つの半有限 v.N. 代数 $(\mathfrak{N}_k,\tau_k,\mathfrak{S}_k)$ $(k=1,2)$ において，$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\otimes\mathfrak{N}_2$ をテンソル積 v.N. 代数とし，$\tau(A_1\otimes A_2)=\tau_1(A_1)\tau_2(A_2)$ $(\forall A_1\in\mathfrak{N}_1$，$\forall A_2\in$

$\mathfrak{N}_2$) となる半有限トレース τ を $\tau_1 \otimes \tau_2$ と書く．このとき，$L^1(\mathfrak{N}_1 \otimes \mathfrak{N}_2, \tau_1 \otimes \tau_2)$ から $L^1(\mathfrak{N}_k, \tau_k)$ 上への写像 $\hat{\tau}_k$ が次のように定められているとき，この $\hat{\tau}_k$ を**部分トレース**とよぶ：$\hat{\tau}_1(A_1 \otimes A_2) = \tau_1(A_1)A_2$，$\hat{\tau}_2(A_1 \otimes A_2) = \tau_2(A_2)A$.

〈4〉 **加法性**：$\varphi_k \in \mathfrak{S}_{k,0}$ $(k=1,2)$ に対して，

$$S_{\tau_1 \otimes \tau_2}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = S_{\tau_1}(\varphi_1) + S_{\tau_2}(\varphi_2).$$

証明 $T_{\varphi_1 \otimes \varphi_2} = T_{\varphi_1} \otimes T_{\varphi_2}$ がわかるから直接 (12.2) へ代入すればよい． ▮

〈5〉 **劣加法性**：$\varphi \in \mathfrak{S}_0 (\equiv \mathfrak{S}(\mathfrak{N}_1 \otimes \mathfrak{N}_2)_0)$ と，$\varphi_1 = \varphi \circ \hat{\tau}_2$，$\varphi_2 = \varphi \circ \hat{\tau}_1$ に対して，$S_{\tau_1 \otimes \tau_2}(\varphi) \leqq S_{\tau_1}(\varphi_1) + S_{\tau_2}(\varphi_2)$.

証明 $T_{\varphi_k} = \hat{\tau}_j(T_\varphi)$，$\tau_1 \otimes \tau_2(A) = \tau_1(\hat{\tau}_2(A)) = \tau_2(\hat{\tau}_1(A))$ $(\forall A \in \mathfrak{N})$ より，表現 (12.3) を使うと

$$\begin{aligned} S_{\tau_1}(\varphi_1) &+ S_{\tau_2}(\varphi_2) - S_{\tau_1 \otimes \tau_2}(\varphi) \\ &= -\tau_1(T_{\varphi_1} \log T_{\varphi_1}) - \tau_2(T_{\varphi_2} \log T_{\varphi_2}) + \tau_1 \otimes \tau_2(T_\varphi \log T_\varphi) \\ &= \tau_1 \otimes \tau_2(T_\varphi \log T_\varphi - T_\varphi \log T_{\varphi_1} \otimes T_{\varphi_2}) \geqq 0. \end{aligned}$$ ▮

〈6〉 次が成立する．（1） $\varphi \in \mathfrak{S}_d$ のとき，$S_\tau(\varphi) < +\infty$；（2） $\mathfrak{N} \neq \boldsymbol{C}I$ であれば，$\varphi \in \mathfrak{S}_d$ が存在して $S_\tau(\varphi) \neq 0$.

証明 （1）は明らかだから，（2）を示す．$\mathfrak{N} \neq \boldsymbol{C}I$ だから，射影作用素 $E \in \mathfrak{N}$ で，$0 < E < I$ となるものが存在する．また，τ は半有限だから，さらに 2 つの射影作用素 $P, Q \in \mathfrak{N}$ で $0 < P \leqq E$，$0 < Q \leqq I - E$ かつ $0 < \tau(P) < +\infty$，$0 < \tau(Q) < +\infty$ なるものが存在する．ここで，$\lambda \in (0,1)$ に対して，$T = \lambda P/\tau(P) + (1-\lambda)Q/\tau(Q)$ かつ $\psi(A) = \tau(TA)$ $(\forall A \in \mathfrak{N})$ とおくと，$\psi \in \mathfrak{S}_d$ で $S_\tau(\psi) \neq 0$. ▮

なお，$(\mathfrak{N}, \tau)$ が有限な v.N. 代数のとき，Segal エントロピーは強劣加法性を有していることが Epstein [E5] の仕事よりわかるが，半有限な v.N. 代数に関しては定かでない．

ところで，Segal エントロピーの特徴付けとして次の定理がある（証明は論文

[O2] を参照).

〈**定理 12.1**〉 汎函数 $D:\mathfrak{S}_0\to\overline{\boldsymbol{R}}$ が〈1〉及び〈3〉～〈6〉を満たすとき，定数倍を除いて $D(\cdot)$ は一意に決定される．すなわち，

$$D(\varphi)=\text{const}\cdot S_\tau(\varphi),\quad \forall\varphi\in\mathfrak{S}_0.$$

ここで，Segal エントロピーが，実際，Boltzmann-Gibbs エントロピーおよび v.N. エントロピーの拡張になっていることを見ておこう．

（1） $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を σ-有限な測度空間とすると，$\mathfrak{N}=L^\infty(\Omega,\mu)$ は有限な v.N. 代数で，$\tau(g)=\int_\Omega g\,d\mu$ $(\forall g\in\mathfrak{N})$ はトレースとなる．このとき，任意の $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して，RND $f\in L^1(\Omega,\mu)$ が存在して，$\varphi(g)=\int_\Omega gf\,d\mu$ と書ける．ここで，$\nu(A)=\varphi(1_A)$ $(\forall A\in\mathcal{F})$ とおくと，$f=\frac{d\nu}{d\mu}$. したがって，$\frac{d\nu}{d\mu}\in L^\infty(\Omega,\mu)$ (i.e., $\varphi\in\mathfrak{S}_0$) の場合，

$$\begin{aligned}S_\tau(\varphi)&=-\int_{+0}^\infty\lambda\log\lambda\,d\mu\left(\left\{x\in\Omega\,;\,\frac{d\nu}{d\mu}(x)<\lambda\right\}\right)\\&=-\int_\Omega\frac{d\nu}{d\mu}\log\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=S_\mu(\nu)\quad(=B\cdot G\text{ のエントロピー}).\end{aligned}$$

（2） $\mathfrak{N}=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$, $\tau=\text{tr}$ のとき，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の正規状態 φ は $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_{+,1}$ を使って $\varphi(A)=\text{tr}\,\rho A$ $(\forall A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ と表せる．ρ の Schatten 分解を $\rho=\sum\lambda_nE_n$ とすると，

$$\begin{aligned}S_\tau(\varphi)&=-\sum\lambda_n\log\lambda_n\tau(E_n)\\&=-\sum\lambda_n\log\lambda_n=S(\rho)\quad(=\text{v.N. エントロピー}).\end{aligned}$$

さて，$\varphi(A)=\tau(T_\varphi A)$, $\psi(A)=\tau(T_\psi A)$ で与えられた．$\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対する相対エントロピー $S(\psi|\varphi)$ は

$$S(\psi|\varphi)=\tau(T_\psi\log T_\psi-T_\psi\log T_\varphi)\tag{12.5}$$

と表せる．したがって，Segal エントロピー $S_\tau(\varphi)$ と相対エントロピーは

$$S_\tau(\varphi)=-S(\varphi|\tau)\tag{12.6}$$

の関係がある．一般に，τ は状態ではないので，この等式からも $S_\tau(\varphi)$ は正・負両方の値をとることがわかるであろう．こうして，相対エントロピーの性質から Segal エントロピーの性質を導き出すこともできるのである［U8]．

12.2 自己同型写像のエントロピー

第2章で論じたように，古典力学系 $(\Omega, \mathcal{F}, p, T)$ における流れ T のエントロピー $S(T)$ は，$\mathcal{P}(\mathcal{F})$ を Ω の有限分割の全体としたとき，

$$S(T)=\sup\{S(\tilde{A}, T)\ ;\ \tilde{A}\in\mathcal{P}(\mathcal{F})\} \tag{12.7}$$

$$S(\tilde{A}, T)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}T^{-k}\tilde{A}\right) \tag{12.8}$$

で定義されているが，上記の $S(\tilde{A}, T)$ は〈補題 2.4〉より，

$$S(\tilde{A}, T)=\lim_{n\to\infty}S\left(\tilde{A}\middle|\bigvee_{k=1}^{n}T^{-k}\tilde{A}\right) \tag{12.9}$$

と表すこともできた．

この節では，流れのエントロピー $S(T)$ を量子系のそれに拡張する．いま，ある量子力学系が v.N. 代数による3つ組 $(\mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \alpha)$ で記述されているとする．ここで，$\mathfrak{N}$ は可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の v.N. 代数，$\mathfrak{S}$ は $\mathfrak{N}$ 上の正規状態の全体，α は $\mathfrak{N}$ 上の $*$ 自己同型写像とする．さらに，この α に関して不変な状態 φ が存在すると仮定し，系の状態はこの φ で記述されているとする．

古典論では，(12.8) の仕方でも，条件付エントロピーを使う (12.9) の仕方でも同じ $S(\tilde{A}, T)$ が得られるが，量子系においてはこの2つの方法が同じものであるかどうか定かではない．《1》 Emch [E2,4] は量子系における条件付エントロピーを考えることによって，また，《2》 Connes と Størmer [C4, S13] は (12.8) の定義を量子系へ拡張することによって自己同型写像 α のエントロピーを定式化した．ここでは，以下，彼等の主要な結果を概説する．

まず，《1》の方法を説明する．v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ の中の射影作用素の全体を $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ とし，単位元 I の分解を $\tilde{P}=\{P_k\}$ とする．すなわち，$P_k\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$, $P_k\perp P_j\,(k\neq j)$ かつ $\sum P_k=I$ である．この I の分解の全体を以下 $\boldsymbol{P}$ で表す．さらに，α は強連続な一径数自己同型群 $\alpha(\boldsymbol{R})$ であるとし，系を記述している状態 φ は忠実

であるとする．このとき，$\lambda_k=\varphi(P_k)$，$\varphi_k(A)=\lambda_k^{-1}\varphi(P_kAP_k)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ とおくと，$\tilde{P}=\{P_k\}$ を観測した後，状態 φ は $\varphi_{\tilde{P}}=\sum\lambda_k\varphi_k$ へ変化してしまう．$\mathfrak{N}$が可換であれば，$\varphi_{\tilde{P}}=\varphi$ となり，φ は不変であるが，$\mathfrak{N}$ が可換でない量子系では，一般に，$\varphi_{\tilde{P}}\neq\varphi$ となり，φ で記述された系における $\boldsymbol{\alpha}$ のエントロピーを定義することはできなくなる．この不都合を回避するために，次の結果が使われる．

〈**補題 12.2**〉 σ_t^{φ} を φ に関するモジュラー自己同型写像，$\mathfrak{N}_{\varphi}$ を σ_t^{φ}-不変集合(i.e., $\mathfrak{N}_{\varphi}\equiv\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\sigma_t^{\varphi}(A)=A\}$) とすると，次は同値．(1) $\varphi_{\tilde{P}}=\varphi$；(2) $\tilde{P}\subset\mathfrak{N}_{\varphi}$；(3) $\alpha_t(\tilde{P})\subset\mathfrak{N}_{\varphi}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$；(4) $\{\alpha_t(\tilde{P})\,;\,t\in\boldsymbol{R}\}''\subset\mathfrak{N}_{\varphi}$.

さて，$\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ で $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}_{\varphi}$ となるものの集合を $\boldsymbol{M}$，$\tilde{P}\subset\mathfrak{N}_{\varphi}$ となる $\tilde{P}\in\boldsymbol{P}$ の集合を $\boldsymbol{A}$ とすると，この $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{M})$ においては，上の補題より，前述の困難は回避される．したがって，古典論から類推で $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{M}$ から $\boldsymbol{R}^+$ への写像として，φ における条件付エントロピー $S_{\varphi}(\cdot|\cdot)$ を定義することが可能になる．ところで，φ の $\mathfrak{N}_{\varphi}$ への制限 $\varphi\restriction\mathfrak{N}_{\varphi}$ は $\mathfrak{N}_{\varphi}$ 上の有限トレースであるから，$\mathfrak{N}$ が有限な v.N. 代数で，φ が $\mathfrak{N}$ 上のトレース状態 τ のとき，$S_{\tau}(\cdot|\cdot):\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{R}^+$ を考えることと，上記の $S_{\varphi}(\cdot|\cdot)$ を考えることとは同等である．この場合，$\boldsymbol{M}$ は $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数の全体である．したがって，以下我々は有限な v.N. 代数 $(\mathfrak{N},\tau)$ において議論を展開する．ただし，$\tau\circ\alpha_t=\tau$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ は仮定しておく．

Iの任意の分解 $\tilde{P}\in\boldsymbol{P}$ の τ におけるエントロピーは，函数 $\eta(t)=-t\log t$ $(\forall t\in(0,1))$ を使って

$$S_{\tau}(\tilde{P})=\sum_k\eta(\tau(P_k)) \tag{12.10}$$

と表せるから，2つの分解 $\tilde{P},\tilde{Q}\in\boldsymbol{P}$ に対して，$\tilde{Q}$ で条件付けられた τ における $\tilde{P}$ のエントロピーは

$$S_{\tau}(\tilde{P}|\tilde{Q})=\sum\lambda_kS_{\tau_k}(\tilde{P}) \tag{12.11}$$

で定義される．ただし，$\lambda_k\equiv\tau(Q_k)$，$\tau_k(\cdot)\equiv\lambda_k^{-1}\tau(Q_k\cdot)$ である．(12.10) よ

り，$S_\tau(\tilde{P}|\tilde{Q})$ は

$$S_\tau(\tilde{P}|\tilde{Q})=\sum_k \lambda_k \sum_j \eta(\tau_k(P_j)) \tag{12.12}$$

と表せる．とくに $\tilde{Q}$ と $\tilde{P}$ が可換（i.e., $P_jQ_k=Q_kP_j$）のときはこの条件付エントロピーは古典論の場合におけるそれ（第2章の（2.4））に一致する．さらに，$\mathfrak{N}$ から v.N. 部分代数 $\tilde{Q}''=\{Q_k\}''$ への条件付期待値 $E_\tau(\cdot|\tilde{Q}'')$（付章 4.3 項参照）を使うと

$$S_\tau(\tilde{P}|\tilde{Q})=\sum_j \tau(\eta(E_\tau(P_j|\tilde{Q}''))) \tag{12.13}$$

と表せる．ここで，$E_\tau(A|\tilde{Q}'')=\sum_k \tau_k(A)Q_k$ である．

〈補題 12.3〉 $\tilde{P},\tilde{Q},\tilde{P}_1,\tilde{P}_2\in\boldsymbol{P}$ において，次が成立．（1） $S_\tau(\tilde{P}|\tilde{Q})\geqq 0$；（2） $S_\tau(\tilde{P}|\tilde{Q})=0\Longleftrightarrow\tilde{P}\subset\tilde{Q}$；（3） $\tilde{P}_1\supset\tilde{P}_2$ ならば，$S_\tau(\tilde{P}_1|\tilde{Q})\geqq S_\tau(\tilde{P}_2|\tilde{Q})$；（4） $\tilde{P}_1\supset\tilde{P}_2$ ならば，$S_\tau(\tilde{P}|\tilde{P}_1)\leqq S_\tau(\tilde{P}|\tilde{P}_2)$．

$\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ に関する $\tilde{P}\in\boldsymbol{P}$ の条件付エントロピーを

$$S_\tau(\tilde{P}|\mathfrak{M})=\inf\{S_\tau(\tilde{P}|\tilde{Q})\ ;\ \tilde{Q}\subset\mathfrak{M}\} \tag{12.14}$$

で定めると，〈補題 12.3〉の（4）より，$S_\tau(\tilde{P}|\tilde{Q}'')=S_\tau(\tilde{P}|\tilde{Q})$ となる．さて，一般の v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ とその上の忠実な α-不変状態 φ における自己同型写像 α のエントロピー $S_\varphi(\alpha)$ を導入しよう．$P_k\in\mathfrak{N}_\varphi$ である $\tilde{P}=\{P_k\}$ に対して（このような $\tilde{P}$ の集合を $\boldsymbol{P}_\varphi$ とかく）$\mathfrak{N}_l(\tilde{P})=\{\alpha_k(\tilde{P})\ ;\ k\in\boldsymbol{Z},\ -l\leqq k<0\}''$ とおくと，$\mathfrak{N}_l(\tilde{P})\subset\mathfrak{N}_{l+1}(\tilde{P})$ となり，$\tau=\varphi\restriction\mathfrak{N}_\varphi$ として〈補題 12.3〉の（4）を適用すると

$$S_\varphi(\tilde{P},\alpha)=\lim_{l\to\infty} S_{\varphi\restriction\mathfrak{N}_\varphi}(\tilde{P}|\mathfrak{N}_l(\tilde{P})) \tag{12.15}$$

が存在する．ここで，

$$S_\varphi(\alpha)=\sup\{S_\varphi(\tilde{P},\alpha)\ ;\ \tilde{P}\in\boldsymbol{P}_\varphi,\ \ S_\tau(\tilde{P})<+\infty\} \tag{12.16}$$

とおくと，$\mathfrak{N}$ が可換のとき，この $S_\varphi(\alpha)$ は第2章で論じた K.S エントロピーに一致する．これが量子系における K.S エントロピーのひとつの定式化である．

なお，次の条件を満たす $\{\mathfrak{N}, \varphi, \alpha(\boldsymbol{R}), \mathcal{A}\}$ を**量子論的 $\boldsymbol{K}$-流** (K–flow) という：(i) $\varphi\circ\alpha_t=\varphi$；(ii) $\{\alpha_t(\mathcal{A})\,;\,t\in\boldsymbol{R}\}''=\mathfrak{N}$，(iii) $\cap\{\alpha_t(\mathcal{A})\,;\,t\in\boldsymbol{R}\}=\boldsymbol{C}I$，(iv) $\sigma_t^{\varphi}(\mathcal{A})=\mathcal{A}$．このとき，

〈定理 12.4〉 $\mathfrak{N}_\varphi\neq\boldsymbol{C}I$ である K 系 $\{\mathfrak{N}, \varphi, \alpha(\boldsymbol{R}), \mathcal{A}\}$ において，$S_\varphi(\alpha)>0$.

次に《2》の方法について議論しよう．この方法では，単位の分解に伴う射影作用素の代わりに有限次元の v.N. 部分代数を考える．この場合も，2つの v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ の共通部分 $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2$ が一般に v.N. 部分代数にならず，この点で古典論と異なり問題が難しくなる．

以下，有限 v.N. 代数 $(\mathfrak{N}, \tau)$ における v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ に対して，$\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{M}$ への τ に関する条件付期待値 $E_\tau(\cdot|\mathfrak{M})$ を単に，$\mathcal{E}_{\mathfrak{M}}$ と記す．さらに，有限個を除いて0である $\mathfrak{N}$ の正の元よりなる族 $\tilde{A}=\{A_{i_1\cdots i_k}\,;\,i_l\in\boldsymbol{N}\}$ で条件 $\sum_{i_1\cdots i_k}A_{i_1\cdots i_k}=I$ を満たすものの集合を $\mathcal{O}_k$ とおき，任意の $\tilde{A}\in\mathcal{O}_k$ に対して

$$A_{i_m}{}^m=\sum_{i_1\cdots i_{m-1},i_{m+1}\cdots i_k}A_{i_1\cdots i_k}\quad(1\leqq m\leqq k)$$

とおく．さて，$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_k$ を $\mathfrak{N}$ の有限次元の v.N. 部分代数とし，$\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_k$ の τ に関するエントロピーを

$$S_\tau(\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_k)=\sup\left\{\sum_{i_1\cdots i_k}\eta(\tau(A_{i_1\cdots i_k}))-\sum_{l=1}^{k}\sum_{i_l}\tau(\eta(\mathcal{E}_{\mathfrak{M}_l}(A_{i_l}{}^l)))\,;\,\tilde{A}\in\mathcal{O}_k\right\}$$

で定める．また，$\mathfrak{M}, \mathfrak{R}$ を $\mathfrak{N}$ の有限次元 v.N. 部分代数とし，$\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{R}$ に対する条件付エントロピー $S_\tau(\mathfrak{M}|\mathfrak{R})$ を

$$S_\tau(\mathfrak{M}|\mathfrak{R})=\sup\{\sum_i[\tau(\eta(\mathcal{E}_{\mathfrak{R}}(A_i)))-\tau(\eta(\mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(A_i)))]\,;\,\tilde{A}\in\mathcal{O}_1\}$$

で定義する．このとき，$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}$ を $\mathfrak{N}$ の有限次元 v.N. 部分代数とすると，次の結果が容易に証明される．

〈定理 12.5〉 (1) $\mathfrak{M}_i\subset\mathfrak{R}_i$ のとき $S_\tau(\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_k)\leqq S_\tau(\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_k)$.

(2) $S_\tau(\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_k, \mathfrak{M}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{M}_n)\leqq S_\tau(\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_k)+S_\tau(\mathfrak{M}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{M}_n)$.

(3) $\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_k\subset\mathfrak{R}$ のとき，$S_\tau(\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_k, \mathfrak{R}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{R}_n)\leqq S_\tau(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{R}_n)$.

（4）　$P_i \in \mathfrak{M}$ である $\{P_i\} \in \boldsymbol{P}$ に対して，$S_\tau(\mathfrak{M}) = \sum_i \eta(\tau(P_i))$.
すなわち，$S_\tau(\mathfrak{M})$ は (12.10) に一致する．さらに，任意の $\tilde{P} = \{P_i\}$，$\tilde{Q} = \{Q_i\} \in \boldsymbol{P}$ に対して，$\mathfrak{M} = \tilde{P}''$，$\mathfrak{R} = \tilde{Q}''$ とおくと，$S_\tau(\mathfrak{M}|\mathfrak{R})$ は (12.11) で定義された $S_\tau(\tilde{P}|\tilde{Q})$ に一致する．

（5）　$(\mathfrak{M}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{M}_k)''$ が互いに可換な $\mathfrak{R}_j(\subset \mathfrak{M}_j)$ から生成されているとき，$S_\tau(\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_k) = S_\tau((\mathfrak{M}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{M}_k)'')$.

（6）　$S_\tau(\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_k) \leqq S_\tau(\mathfrak{R}_1, \cdots, \mathfrak{R}_k) + \sum_j S_\tau(\mathfrak{M}_j|\mathfrak{R}_j)$.

（7）　$S_\tau(\mathfrak{M}|\mathfrak{L}) \leqq S_\tau(\mathfrak{M}|\mathfrak{R}) + S_\tau(\mathfrak{R}|\mathfrak{L})$.

（8）　$S_\tau(\mathfrak{M}|\mathfrak{R})$ は $\mathfrak{M}$ に関して増加，$\mathfrak{R}$ に関して減少函数.

（9）　$\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{R}$ が可換なとき，

$$S_\tau(\mathfrak{M}|\mathfrak{R}) = S_\tau((\mathfrak{M} \cup \mathfrak{R})''|\mathfrak{R}) = S_\tau((\mathfrak{M} \cup \mathfrak{R})'') - S_\tau(\mathfrak{R}).$$

$\mathfrak{M}_1 \equiv \{A \in \mathfrak{M}\,;\, \|A\| \leqq 1\}$ の元 A に対して，$B \in \mathfrak{R}_1$ が存在して，$\|A-B\|_2 \equiv \sqrt{\tau(A-B)^*(A-B)} < \delta$ $(\delta > 0)$ となるとき，$\mathfrak{M} \overset{\delta}{\subset} \mathfrak{R}$ と表すことにする．このとき，

〈補題 12.6〉　各 $n \in \boldsymbol{N}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta(n, \varepsilon) > 0$ が存在して，

$$(\dim \mathfrak{M} = n,\ \mathfrak{M} \overset{\delta}{\subset} \mathfrak{R}) \Rightarrow S_\tau(\mathfrak{M}|\mathfrak{R}) < \varepsilon$$

が成立する．

さて，＊自己同型写像 α に関するエントロピーを導入しよう．

$$S_\tau(\mathfrak{M}, \alpha) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_\tau(\mathfrak{M}, \alpha(\mathfrak{M}), \cdots, \alpha^{n-1}(\mathfrak{M}))$$

$$S_\tau(\alpha) \equiv \sup\{S_\tau(\mathfrak{M}, \alpha)\,;\, \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}, \dim \mathfrak{M} < +\infty\}$$

この $S_\tau(\alpha)$ に関して，Kolmogorov-Sinai の定理の量子力学版が次のように表される．

〈定理 12.7〉　$\mathfrak{R}$ が超有限な v.N. 代数（すなわち，$\mathfrak{R}_k$ を I_{p_k} 型 $(p_k \in \boldsymbol{N})$ の v.N. 代数で $\mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{R}_{k+1}$ のとき $\mathfrak{R} = (\cup \mathfrak{R}_k)''$）とする．このとき，有限次元

v.N. 部分代数の増大列 $\{\mathfrak{M}_k\}$ が $\mathfrak{N}=(\cup\mathfrak{M}_k)''$ を満たすとき，

$$S_\tau(\alpha)=\lim_{k\to\infty} S_\tau(\mathfrak{M}_k, \alpha).$$

この定理を使って，いくつかの場合において，$S_\tau(\alpha)$ を計算してみると：

1°　$\mathfrak{N}$ が可換ならば $S_\tau(\alpha)$ は古典的な K-S エントロピーに一致する．

2°　ある $n\in\boldsymbol{N}$ が存在して $\alpha^n=$恒等変換になる場合は $S_\tau(\alpha)=0$.

3°　$\mathfrak{N}$ が超有限のとき，$S_\tau(\alpha^k)=|k|S_\tau(\alpha)$ $(\forall k\in\boldsymbol{Z})$.

4°　M_n を $n\times n$ 行列の集合とし，$\mathfrak{N}_k\equiv M_n$ で τ_k を $\mathfrak{N}_k$ 上のトレース状態とする．このとき，$\mathfrak{N}\equiv\bigotimes_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{N}_k$, $\tau\equiv\bigotimes_{-\infty}^{\infty}\tau_k$ であり，α が $\alpha(\otimes A_k)=\otimes A_{k+1}$ で定められるシフトであれば，$\tau\circ\alpha=\tau$ かつ $S_\tau(\alpha)=\log n$ となる．

5°　φ_0 を M_n 上の忠実な状態で，その固有値を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ とする．$\mathfrak{N}_k\equiv M_n$, $\varphi_k\equiv\varphi_0$, $\mathfrak{M}\equiv\bigotimes_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{N}_k$, $\varphi\equiv\bigotimes_{-\infty}^{\infty}\varphi_k$ とおく．このとき，(1)　$\mathfrak{N}=\mathfrak{M}_\varphi$ であれば，$\mathfrak{N}$ は超有限 Π_1 型因子である；(2)　$\mathfrak{M}$ 上のシフト (4° 参照) の $\mathfrak{N}$ への制限を α とすると，α はエルゴード的 (i.e., $\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\alpha(A)=A\}=\boldsymbol{C}I$) であり，$S_\tau(\alpha)=-\sum_{k=1}^{n}\lambda_n\log\lambda_n$.

12.3　格子系のエントロピーと変分原理

ν 次元格子 $\boldsymbol{Z}^\nu$ において，各格子点 $a\in\boldsymbol{Z}^\nu$ に有限次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_a=\mathcal{H}_0$ を対応させると，$\boldsymbol{Z}^\nu$ の有限集合 Λ には次の Hilbert 空間が対応する：

$$\mathcal{H}_\Lambda=\bigoplus_{a\in\Lambda}\mathcal{H}_a$$

また，C* 代数 $\mathcal{A}_a$を$\mathcal{A}_a=\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_a)$ ととり，

$$\mathcal{A}_\Lambda=\bigotimes_{a\in\Lambda}\mathcal{A}_a$$

とおき，これを Λ に関する局所 C* 代数という．いま，$\boldsymbol{Z}^\nu$ の有限集合の全体を $\mathcal{F}(\boldsymbol{Z}^\nu)$ とすると，集合族 $\{\mathcal{A}_\Lambda\,;\,\Lambda\in\mathcal{F}(\boldsymbol{Z}^\nu)\}$ において，$\Lambda_2\backslash\Lambda_1\equiv\{k\in\Lambda_2;$ $k\notin\Lambda_1\}$ とおくと，$\mathcal{A}_{\Lambda_2}=\mathcal{A}_{\Lambda_1}\otimes\mathcal{A}_{\Lambda_2\backslash\Lambda_1}$ であり，さらに，$\Lambda_1\subset\Lambda_2$ のとき，$j_{\Lambda_2\Lambda_1}(A)\equiv A\otimes I_{\Lambda_2\backslash\Lambda_1}$ $(\forall A\in\mathcal{A}_{\Lambda_1}$, I_Λ は $\mathcal{A}_\Lambda$ の単位元) で定義される $\mathcal{A}_{\Lambda_1}$ から $\mathcal{A}_{\Lambda_2}$ へのうめ込み $j_{\Lambda_2\Lambda_1}$ が存在して，次の性質を有する：

（1） $\Lambda_1\subset\Lambda_2\subset\Lambda_3\Rightarrow j_{\Lambda_3\Lambda_1}=j_{\Lambda_3\Lambda_2}j_{\Lambda_2\Lambda_1}$

（2） $\Lambda_1\subset\Lambda,\ \Lambda_2\subset\Lambda,\ \Lambda_1\cap\Lambda_2=\emptyset\Rightarrow[j_{\Lambda\Lambda_1}(A_1),\ j_{\Lambda\Lambda_2}(A_2)]=0,\ \forall A\in\mathcal{A}_{\Lambda_1}$, $\forall A_2\in\mathcal{A}_{\Lambda_2}$. したがって，$\Lambda_1\cap\Lambda_2=\emptyset$ のとき，$\mathcal{A}_{\Lambda_1}$ と $\mathcal{A}_{\Lambda_1}\otimes I_{\Lambda_2}$ は同一視でき，$\{\mathcal{A}_\Lambda\,;\,\Lambda\in\mathcal{F}(\boldsymbol{Z}^\nu)\}$ は増大族とみなすことができる．さらに，$\mathcal{A}_0=\bigcup_{\Lambda\in\mathcal{F}(\boldsymbol{Z}^\nu)}\mathcal{A}_\Lambda$ はノルム＊代数であり，このノルムで $\mathcal{A}_0$ を完備化したもの

$$\mathcal{A}=\overline{\cup\{\mathcal{A}_\Lambda\,;\,\Lambda\in\mathcal{F}(\boldsymbol{Z}^\nu)\}}$$

を**局所 C* 代数**といい，これはすべての $\mathcal{A}_\Lambda$ を C* 部分代数として含む最小の C* 代数である．また，この C* 代数は単純な（すなわち，真の両側イデアルを含まない）代数でもある．

註 以上の定式化は，連続的な量子系の場合にも，$\boldsymbol{Z}^\nu$ の代わりに $\boldsymbol{R}^\nu$ をとり，$\mathcal{A}_\Lambda=\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_\Lambda)$（$\forall\Lambda\in\mathcal{F}(\boldsymbol{R}^\nu)$）ととることにより成立し，また，古典系の場合には，$\mathcal{A}_\Lambda=\boldsymbol{C}(\Omega_\Lambda)$（$\Omega_\Lambda$ は $\Lambda\in\mathcal{F}(\boldsymbol{R}^\nu)$ に依存する適当な相空間）に対して成立する．

さて，$a=(a_1,\cdots,a_\nu)\in\boldsymbol{Z}^\nu$ に対して

$$\Lambda(a)=\{b\in\boldsymbol{Z}^\nu\,;\,0\leqq b_j\leqq a_j\quad j=1,\cdots,\nu\}$$

とおき，この集合をベクトル $na=(n_1a_1,\cdots,n_\nu a_\nu)$ だけ平行移動した集合

$$\Lambda_n\equiv\Lambda(a)+na\quad(n\in\boldsymbol{Z}^\nu)$$

は $\boldsymbol{Z}^\nu$ のひとつの分割となる．ここで，任意 $\Lambda\subset\boldsymbol{Z}^\nu$ に対して，$N_a^+(\Lambda)$ (resp. $N_a^-(\Lambda)$) を $\Lambda_n\cap\Lambda\neq\emptyset$ (resp. $\Lambda_n\subset\Lambda$) となる集合 Λ_n の個数とする．このとき，すべての a に対して，$\lim N_a^-(\Lambda)=\infty$, $\lim N_a^-(\Lambda)/N_a^+(\Lambda)=1$ となるように極限 $\Lambda\to\infty$ をとることを **von Hove の意味で極限**をとるといい，$\Lambda\rightrightarrows\infty$ で表す．

任意の $a,\xi\in\boldsymbol{Z}^\nu$ に対して，$\mathcal{H}_\xi$ から $\mathcal{H}_{\xi+a}$ へのユニタリー写像 $U_\xi(a)$ を（i） $U_\xi(0)=I_\xi$,（ii） $U_\xi(a+b)=U_{\xi+b}(a)U_\xi(b)$（$\forall b\in\boldsymbol{Z}^\nu$）と定め，$U_\Lambda(a)=\bigotimes_{\xi\in\Lambda}U_\xi(a)$ とおく．このユニタリー作用素を使って

$$\tau_a(A)=U_\Lambda(a)AU_{\Lambda+a}(-a)$$

とおくと，これは $\mathcal{A}_\Lambda$ の元を $\mathcal{A}_{\Lambda+a}$ の元へ移す $\mathcal{A}$ 上の自己同型写像（i.e.,

$\tau : \boldsymbol{Z}^\nu \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$) である.

ところで，$\mathcal{A}$ 上の状態 φ で，φ の $\mathcal{A}_\Lambda$ への制限 $\varphi_\Lambda(\equiv\varphi\restriction\mathcal{A}_\Lambda)$ が次の条件を満たすとき，**局所的正規状態**という：$\sigma_\Lambda \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H}_\Lambda)_{+,1}$ が存在して，$\varphi_\Lambda(A)=\mathrm{tr}_\Lambda \rho_\Lambda A$ $(\forall A\in\mathcal{A}_\Lambda)$. この φ は，$\Lambda\subset\Lambda'$ に対して，$\rho_\Lambda=\mathrm{tr}_{\Lambda'\setminus\Lambda}\rho_{\Lambda'}$ を満たす密度作用素の族 $\{\rho_\Lambda\}$ と同一視できる：$\varphi=\{\rho_\Lambda\}$. なお，$\varphi=\{\rho_\Lambda\}$ が **τ-不変** (i.e., $\varphi\in I(\tau)$) あるいは，**$\boldsymbol{Z}^\nu$-不変**であるとは $\rho_{\Lambda+a}=U_\Lambda(a)\rho_\Lambda U_{\Lambda+a}(-a)$ を満たすことをいう.

$\varphi=\{\rho_\Lambda\}$ において，ρ_Λ のエントロピー $S_\Lambda(\varphi)=-\mathrm{tr}_\Lambda\rho_\Lambda\log\rho_\Lambda$ は次の性質を有する.

〈定理 12.8〉 $|\Lambda|$ を Λ の体積とすると，次が成立する.

（1） $0\leqq S_\Lambda(\varphi)\leqq|\Lambda|\log(\dim\mathcal{H}_0)$.

（2） $\Lambda_1\subset\Lambda_2\Rightarrow S_{\Lambda_2}(\varphi)-S_{\Lambda_1}(\varphi)\leqq(|\Lambda_2|-|\Lambda_1|)\log(\dim\mathcal{H}_0)$.

（3） **劣加法性**：$\Lambda_1\cap\Lambda_2=\emptyset\Rightarrow S_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}(\varphi)\leqq S_{\Lambda_1}(\varphi)+S_{\Lambda_2}(\varphi)$.

（4） **強劣加法性**：$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ が互いに素$\Rightarrow S_{\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3}(\varphi)+S_{\Lambda_2}(\varphi)\leqq S_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}(\varphi)+S_{\Lambda_2\cup\Lambda_3}(\varphi)$.

この定理は第8章で論じた $S(\rho)$ の場合と同様にして証明できるので読者は演習問題と思って証明を試みてみるとよい.

〈定理 12.9〉 $\varphi\in I(\tau)$ のとき，次が成立する.

（1） $S(\varphi)=\lim\limits_{\Lambda\rightrightarrows\infty}|\Lambda|^{-1}S_\Lambda(\varphi)$ が存在して，$0\leqq S(\varphi)\leqq\log 2$.

（2） $S(\varphi)$ は $I(\tau)$ 上のアフィンかつ上半連続な函数である.

この定理の証明は文献 [I7, L2, R5] にある.

さて，写像 $\boldsymbol{\Phi}:\Lambda\in\mathcal{F}(\boldsymbol{Z}^\nu)\longmapsto\boldsymbol{\Phi}(\Lambda)\in\mathcal{A}_\Lambda$ が $\boldsymbol{\Phi}(\Lambda)=\boldsymbol{\Phi}(\Lambda)^*$ であるとき，この $\boldsymbol{\Phi}$ を**相互作用ポテンシャル**とよぶ. ここで，

$$|||\boldsymbol{\Phi}|||=\sum_{\Lambda\ni 0}\frac{\|\boldsymbol{\Phi}(\Lambda)\|}{|\Lambda|}$$

とおき，$|||\Phi|||<\infty$ となる Φ の全体を $\mathcal{B}$ とすると，これはノルム $|||\cdot|||$ に関する実 Banach 空間となる．さらに，$\Phi(\Lambda)\neq 0$ となる原点 0 を含む有限集合 Λ の個数が有限個の場合，Φ は**有限領域** (finite range) をもつというが，有限領域をもつ相互作用ポテンシャル $\Phi\in\mathcal{B}$ の全体を $\mathcal{B}_0$ とすると，$\overline{\mathcal{B}_0}^{|||\cdot|||}=\mathcal{B}$ である．なお，$\Phi(\Lambda+a)=\tau_a(\Phi(\Lambda))$ となるとき，Φ は $\boldsymbol{Z}^\nu$**-不変**あるいは，**平行移動不変** (translationally invariant) であるといい，また，ある数 n_0 が存在して，$|\Lambda|>n_0$ では $\Phi(\Lambda)=0$ となるとき，Φ は**有限体** (finete body) **相互作用**であるという．

$\Phi\in\mathcal{B}$ に対して，

$$H_\Lambda(\Phi)=\sum_{X\subset\Lambda}\Phi(X)$$

$$A_\Phi=\sum_{0\in\Lambda}\frac{\Phi(\Lambda)}{|\Lambda|}$$

とおくと，$\varphi\in I(\tau)$ に対して，$|\Lambda|^{-1}\varphi(\sum_{a\in\Lambda}\tau_a(A_\Phi))=\varphi(A_\Phi)$ であることより，極限 $\lim_{\Lambda\rightrightarrows\infty}|\Lambda|^{-1}\varphi(H_\Phi(\Lambda))$ が存在して，$\varphi(A_\Phi)$ に等しいことが示せる．ここで，

$$Z_\Lambda(\Phi)=\mathrm{tr}_\Lambda e^{-H_\Lambda(\Phi)}$$

$$P_\Lambda(\Phi)=\frac{1}{|\Lambda|}\log Z_\Lambda(\Phi)$$

とおく．この熱力学的函数に対して，

〈定理 12.10〉 $\Phi\in\mathcal{B}$ が $\boldsymbol{Z}^\nu$-不変なとき，次が成立する．

（1） $P(\Phi)=\lim_{\Lambda\rightrightarrows\infty}P_\Lambda(\Phi)$ が存在する．

（2） $P(\Phi)=\sup\{S(\psi)-\psi(A_\Phi)\ ;\ \psi\in I(\tau)\}$．

（3） $P(\Phi)$ は連続な凸函数で，任意の $\Phi,\Psi\in\mathcal{B}$ に対して，$|P(\Phi)-P(\Psi)|\leqq\|\Phi-\Psi\|$.

（2）を**変分原理**という［R5］．さらに，この（2）の等式を成立させる状態が以下議論するように平衡状態なのである．

以下，われわれは $\boldsymbol{Z}^\nu$-不変かつ有限体相互作用をもつポテンシャル $\Phi\in\mathcal{B}_0$

の全体を $\mathscr{B}_1$ とし，$\Phi\in\mathscr{B}_1$ に関して議論する．この $\Phi\in\mathscr{B}_1$ に対して，$\alpha_t^{\Phi}\in\mathrm{Aut}(\mathscr{A})$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ が存在する (i.e., $\lim_{\Lambda\uparrow\boldsymbol{Z}^\nu}\|\alpha_t^{\Phi}(A)-e^{itH_\Lambda(\Phi)}Ae^{-itH_\Lambda(\Phi)}\|=0$, $\forall A\in\mathscr{A}$) ことがわかる．ところで，領域 Λ の境界から生ずる相互作用エネルギーは

$$W_\Lambda(\Phi)=\sum\{\Phi(X)\,;\,X\cap\Lambda\neq\emptyset,\ X\cap\Lambda^c\neq\emptyset\}$$

と表せる．さて，状態 ψ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき，ψ は定数 β で **Gibbs 条件**を満たすという：(i) ψ は忠実；(ii) $\psi^{\beta W_\Lambda(\Phi)}=\varphi_\Lambda{}^G\otimes\varphi'$. ここで，$\psi^{\beta W_\Lambda(\Phi)}$, $\varphi_\Lambda{}^G$, φ' は以下で与えられる状態である：

(a) $\{\mathscr{H}_\psi,\pi_\psi,x_\psi\}$ を ψ の GNS 表現とし，

$$x_\psi{}^{\beta W_\Lambda}\equiv\exp\left[\frac{1}{2}\{\log\Delta_\psi+\beta W_\Lambda(\Phi)\}\right]x_\psi$$

とすると，$\psi^{\beta W_\Lambda}(A)\equiv\langle x_\psi{}^{\beta W_\Lambda},\ \pi_\psi(A)x_\psi{}^{\beta W_\Lambda}\rangle$.

(b) $\varphi_\Lambda{}^G(A)\equiv\mathrm{tr}_\Lambda e^{-\beta H_\Lambda(\Phi)}A/\mathrm{tr}_\Lambda e^{-\beta H_\Lambda(\Phi)}$, $\forall A\in\mathscr{A}_\Lambda$.

(c) φ' は $\mathscr{A}_{\Lambda^c}$ 上の正の線形汎函数.

〈定理 12.11〉 $\Phi\in\mathscr{B}_1$ と $\psi\in I(\tau)$ に対して，次は同値.

(1) ψ は (α^{Φ},β)-KNS 状態.

(2) ψ が $\beta\Phi$ に関して Gibbs 条件を満たす.

(3) $P(\psi)=S(\psi)-\beta\psi(A_\Phi)$.

この定理は文献 [A7, A8, L1] で証明されている.

付章　数学的基礎

——非可換解析を中心として——

1.　Hilbert 空間上の作用素とその周辺

この付章では Hilbert 空間上の様々な作用素の主要な性質について論じる．なお，この付章の内容は第1巻の付章 4,5 とかなり重複している．

1.1　Hilbert 空間

数体 $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$) 上の線形空間 X の任意の元 x, y に対して，以下の3つの条件を満たす数 $\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{K}$ が定まるとき，$\langle x, y\rangle$ を x と y の内積といい，内積をもつ線形空間を **内積空間** という．（i）$\langle x, x\rangle \geqq 0$,　$=0 \Longleftrightarrow x=0$,　（ii）$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,　(iii) $\langle x, \alpha y_1 + y_2\rangle = \alpha\langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$,　$\forall y_1, y_2 \in X$,　$\forall \alpha \in \boldsymbol{K}$.

内積空間 X において，次の不等式は重要である．

〈定理 1.1〉　Schwarz の不等式： $|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\|y\|$,　$\forall x, y \in X$. 等号はある数 $\lambda \in \boldsymbol{K}$ が存在して，$y=\lambda x$ のときかつそのときのみ成立．ただし，$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ である．

この不等式より，$\|\cdot\|$ は X 上にノルムを定めることが容易にわかる．つまり，（i）$\|x\| \geqq 0$,　$=0 \Longleftrightarrow x=0$,　（ii）$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,　$\forall \alpha \in \boldsymbol{K}$,　(iii) $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$.

内積空間 X がノルム $\|\cdot\|$ に関して完備であるとき，X を **Hilbert 空間** ($\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ なら **実 Hilbert 空間**，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ なら **複素 Hilbert 空間**) といい，以下，Hilbert 空間を $\mathcal{H}$ で表す．

ここで内積空間 X および Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ における主要な性質を列記しよう．

1°　中線定理： $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$,　$\forall x, y \in X$

2°　ノルム空間 X (すなわち，ノルム $\|\cdot\|$ が定義されている空間) が 1° を満たせば，任意の $x, y \in X$ に対して，$\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|ix-y\|^2)$ (**偏極化**) によって，X に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が導入される．逆に内積空間 X はつねにこの等式を満たす．とくに，X が **Banach 空間** (完備なノルム空間) で 1° を満たすとき，X は Hilbert 空間になる．

ここで，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$，および Banach 空間の例を挙げておこう．

例 1　$\mathcal{H} = \boldsymbol{R}^n$,　$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.　$\mathcal{H} = \boldsymbol{C}^n$,　$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$.

例 2　数列空間 $\mathcal{S} = \{x=(x_n)\,;\, x_n \in \boldsymbol{C},\ n \in \boldsymbol{N}\}$ に対して，$l^2 \subset \mathcal{S}$ を次のように定めると，これは Hilbert 空間になる．

$$l^2=\left\{x\in\mathcal{S}\,;\ \langle x,\ x\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\right\}.$$

ただし，$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{x}_n y_n$.

例 3　$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間（μ が σ-有限の場合も含む）とし，$\mathcal{F}$-可測函数の全体を $\mathfrak{M}$ とする．このとき，

$$L^2(\Omega,\mu)=\left\{x\in\mathfrak{M}\ \text{の同値類}\,;\ \langle x,x\rangle=\int_\Omega|x|^2d\mu<\infty\right\}$$

は内積 $\langle x,y\rangle=\int_\Omega\overline{x(\omega)}y(\omega)d\mu(\omega)$ に関して Hilbert 空間になる．

例 4　数列空間 $\mathcal{S}$ の次の部分空間 l^∞, c_0, l^p $(p\geqq1)$ は Banach 空間である．

$$l^\infty=\{x\in\mathcal{S}\,;\ \|x\|\ (\text{または}\ \|x\|_\infty)\equiv\sup_n|x_n|<\infty\},$$

$$c_0=\{x\in\mathcal{S}\,;\ \lim_{n\to\infty}x_n=0\}\ (\text{ノルムは}\ l^\infty\ \text{のそれと同じ}),$$

$$l^p=\left\{x\in\mathcal{S}\,;\ \|x\|_p\equiv\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

$$f=\{x\in\mathcal{S}\,;\ \text{有限個の}\ n\ \text{を除き}\ x_n=0\}.$$

これらは $f\subset l^p\subset c_0\subset l^\infty$, $l^p\subset l^q$ $(1\leq p\leq q)$ の関係にある．また，$f_0=\{x\in f\,;\ x_n\in\boldsymbol{Q}\}$（$\boldsymbol{Q}$ は有理数の全体）とおくと，（i）$\overline{f_0}^{\|\cdot\|_p}=l^p$,（ii）$\overline{f_0}^{\|\cdot\|}=c_0$ となるから，l^p, c_0 は可分である．一方 l^∞ は可分ではない．

例 5　測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対しても Banach 空間 $L^\infty(\Omega,\mu)$, $L^p(\Omega,\mu)$ $(p\geqq1)$ を定めよう．$L^p(\Omega,\mu)$ は $\|x\|_p=\left(\int_\Omega|x|^pd\mu\right)^{1/p}<+\infty$ となる $x\in\mathfrak{M}$ の同値類であり，$L^\infty(\Omega,\mu)$ は $\|x\|$（または $\|x\|_\infty$）$\equiv\inf\{\alpha\in\bar{R}\,;\ |x|\leqq\alpha,\ \mu\text{-a. e.}\}<+\infty$ となる $x\in\mathfrak{M}$ の同値類である．

（1）　$x\in L^\infty\cap L^1\Rightarrow x\in L^p$ $(p\geqq1)$.

（2）　$\mu(\Omega)<\infty\Rightarrow L^\infty\subset L^q\subset L^p$ $(1\leqq p\leqq q)$, $\|x\|=\lim_{p\to\infty}\|x\|_p$ かつ $\overline{L^\infty}^{\|\cdot\|_p}=L^p$ $(p\geqq1)$.

（3）　**Minkowski の不等式**：$\|x+y\|_p\leqq\|x\|_p+\|y\|_p$, $\forall x,y\in L^p$.

（4）　**Hölder の不等式**：$\|xy\|_r\leqq\|x\|_p\|y\|_q$, $\forall x\in L^p$, $\forall y\in L^q$, $r^{-1}=p^{-1}+q^{-1}$.

Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，Ω 上の複素数値（resp. 実数値）連続函数の全体を $C(\Omega)$ (resp. $C_R(\Omega)$) と書く．いま，$\|f\|=\sup\{|f(\omega)|\,;\ \omega\in\Omega\}$ とおくと，$C(\Omega)$ はノルム $\|\cdot\|$ に関して Banach 空間となる．

さて，Hilbert 空間の議論にもどろう．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の元 x,y が $\langle x,y\rangle=0$ のとき，x と y は直交するといい，$x\perp y$ で表す．$\mathcal{H}$ の元の集合族 $\{x_j\,;\ j\in J\}$ が $\langle x_i,x_j\rangle=0$ $(i\neq j)$ を満たすとき，$\{x_j\}$ を**直交系**といい，そのすべての元が $\|x_j\|=1$ のとき，**正規直交系**（ONS と略）という．$\mathcal{S}=\{x_j\}$ を $\mathcal{H}$ の ONS とし，$\mathcal{S}$ を真部分集合として含む $\mathcal{H}$ の ONS が存在しないとき，$\mathcal{S}$ を $\mathcal{H}$ の**完全正規直交系**（CONS と略）という．Zorn の補題からすべて Hilbert 空間は CONS をもつことがわかる．さらに，CONS が可算個の元からなるとき Hilbert 空間は**可分**であるという．

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の ONS $\{x_j ; j\in J\}$ に関する有用な結果を記しておこう．

3°　**Bessel の不等式**：$\sum_{j\in J}|\langle x, x_j\rangle|^2 \leqq \|x\|^2$,　$\forall x\in\mathcal{H}$.

4°　次は同値である：（1）　$\{x_j ; j\in J\}$ が CONS.　（2）　$\langle x, x_j\rangle=0$, $\forall j\in J$ ならば $x=0$.（3）　**Fourier 展開**：任意の $x\in\mathcal{H}$ は $x=\sum_{j\in J}\langle x_j, x\rangle x_j$ と表せる．（$\langle x_j, x\rangle$ を x の **Fourier 係数**という.）（4）　**Parseval の等式**：$\langle x, y\rangle=\sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle\langle x_j, y\rangle$, $\forall x$, $y\in\mathcal{H}$.

$\mathcal{H}$ の線形部分空間を単に**部分空間**といい，$\mathcal{H}$ のノルム $\|\cdot\|$ で閉じている部分空間を**閉部分空間**という．いま，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{H}$ の任意の部分集合とすると，$\mathcal{L}^{\perp}\equiv\{x\in\mathcal{H} ; \langle x, y\rangle=0, y\in\mathcal{L}\}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間となり，これを $\mathcal{L}$ の**直交補空間**という．$\mathcal{H}$ の2つの閉部分空間 $\mathcal{L}, \mathcal{K}$ において，$\langle x, y\rangle=0$ ($\forall x\in\mathcal{L}$, $\forall y\in\mathcal{K}$) であるとき，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{K}$ は互いに**直交する**といい，$\mathcal{L}\perp\mathcal{K}$ で表す．このとき直和 $\mathcal{L}\oplus\mathcal{K}\equiv\{x+y ; x\in\mathcal{L}, y\in\mathcal{K}\}$ も $\mathcal{H}$ の閉部分空間となる．$\mathcal{H}$ の部分集合 $\mathcal{L}$ において

5°　$\mathcal{L}^{\perp\perp}=(\mathcal{L}^{\perp})^{\perp}$ は $\mathcal{L}$ を含む最小の閉部分空間である．

6°　$\mathcal{L}$ が $\mathcal{H}$ の CONS ならば $\mathcal{L}^{\perp}=\{0\}$，$\mathcal{L}^{\perp\perp}=\mathcal{H}$.

7°　**最短距離定理**：$\mathcal{L}$ が閉部分空間であるとき，ある $x\in\mathcal{H}$ に対して，$\delta=\inf\{\|x-y\| ; y\in\mathcal{L}\}$ とおくと，$z\in\mathcal{L}$ が一意に存在して，$\delta=\|x-z\|$ となる．（このとき，対応 $x\longmapsto z$ を $z=P_{\mathcal{L}}x$ とおくと，$P_{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への射影作用素（次の節参照）である.）

〈**定理 1.2**〉　**射影定理**：$\mathcal{L}$ が $\mathcal{H}$ の閉部分空間であるとき，$\mathcal{H}=\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}^{\perp}$.

$\mathcal{H}$ から $\boldsymbol{K}$ への有界線形変換の全体を $\mathcal{H}^*$ とするとき，次の定理が重要である．

〈**定理 1.3**〉　**Riesz の定理**：各 $\varphi\in\mathcal{H}^*$ に対して，$x_\varphi\in\mathcal{H}$ が一意に存在して，$\varphi(y)=\langle x_\varphi, y\rangle$，$\forall y\in\mathcal{H}$，さらに，$\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(y)| ; y\in\mathcal{H}, \|y\|=1\}=\|x_\varphi\|$.

2つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ が**同型**（$\mathcal{H}_1\cong\mathcal{H}_2$ と書く）であるとは，$\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への有界線形変換 U が存在して，$\langle Ux, Uy\rangle_{\mathcal{H}_2}=\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_1}$ ($\forall x, y\in\mathcal{H}_1$) となる場合をいう．とくに，（1）　$\dim\mathcal{H}=n<\infty$ ならば $\mathcal{H}\cong\boldsymbol{R}^n$ または，$\mathcal{H}\cong\boldsymbol{C}^n$；（2）　$\dim\mathcal{H}=\infty$ かつ $\mathcal{H}$ が可分ならば，$\mathcal{H}\cong l^2$；がわかっている．

この節の最後に，2つのHilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ のテンソル積について論じよう．各 $x_1\in\mathcal{H}_1$, $x_2\in\mathcal{H}_2$ に対して，直積空間 $\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2=\{(y_1, y_2) ; y_1\in\mathcal{H}_1, y_2\in\mathcal{H}_2\}$ 上の共役双線形写像 $x_1\otimes x_2$ を

$$x_1\otimes x_2(y_1, y_2)=\langle y_1, x_1\rangle_{\mathcal{H}_1}\langle y_2, x_2\rangle_{\mathcal{H}_2}$$

で定義し，$\mathcal{E}$ をこの共役双線形写像の有限個の線形結合とし，$\mathcal{E}$ 上に $\langle x_1\otimes x_2, y_1\otimes y_2\rangle=\langle x_1, y_1\rangle_{\mathcal{H}_1}\langle x_2, y_2\rangle_{\mathcal{H}_2}$ を定めると，これは $\mathcal{E}$ 上の内積を与える．この内積で $\mathcal{E}$ を完備化したものを $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の**テンソル積 Hilbert 空間**といい，$\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ で表す．$\{x_j\}$, $\{y_k\}$ をそれぞれ $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ の CONS とすると，$\{x_j\otimes y_k\}$ が $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ の CONS になることが

証明される．次のテンソル積は重要である．いま (X,μ), (Y,ν) を2つの測度空間，$\mathscr{H}$ を可分な Hilbert 空間とすると，（1） $L^2(X,\mu)\otimes L^2(Y,\nu)\cong L^2(X\times Y,\mu\otimes\nu)$；（2） $L^2(X,\mu)\otimes\mathscr{H}\cong L^2(X,\mu;\mathscr{H})\left(=\left\{\sum_{k=1}^{N} f_k x_k ;\ f_k\in L^2,\ \ x_k\in\mathscr{H}\right\}^{-\langle\cdot,\cdot\rangle_0}\right.$，ただし $\langle f_k x_k, g_l x_l\rangle_0=\int_X \bar{f}_k g_l d\mu\cdot\langle x_k, x_l\rangle\Big)$.

1.2 作用素

以下，$\mathscr{H}, \mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ を Hilbert 空間，A, B 等はその上の作用素であるとする．

$\mathscr{H}_1$ の部分空間 $\mathscr{D}$ 上で定義され $\mathscr{H}_2$ に値をとる写像 A が，$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$ $(\forall x, y\in\mathscr{D},\ \forall\alpha,\beta\in\boldsymbol{K})$ を満たすとき，A を $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ への**線形作用素**，または単に**作用素**という．$\mathscr{D}$ を A の**定義域**といい，dom A で表し，また，集合 ran $A=\{Ax;\ x\in\text{dom}\,A\}$ を A の**値域**という．

$\mathscr{G}(A)=\{(x, Ax);\ x\in\text{dom}\,A\}$ を A の**グラフ**という．この $\mathscr{G}(A)$ が直和空間 $\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2$ で閉集合のとき，A を**閉作用素**という．これは $\|x_n-x\|\to0$, $\|Ax_n-y\|\to0$ ならば $x\in\text{dom}\,A$ かつ $y=Ax$ となることと同値である．2つの作用素 A, B において，$A\subset B$ （A は B に含まれる） $\Longleftrightarrow\mathscr{G}(A)\subset\mathscr{G}(B)$ で定義する．A を包む閉作用素 B が存在するとき，A を**閉化可能な作用素（可閉作用素）**といい，そのような B のうちで最小のものをAの**閉包**といい，$\bar{A}$ で表す．なお，次が成立する．（1） $A\subset B\Longleftrightarrow\text{dom}\,A\subset\text{dom}\,B$ かつ dom A 上では $A=B$；（2） A が可閉$\Longleftrightarrow\mathscr{G}(\bar{A})=\overline{\mathscr{G}(A)}$.

A を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{H}$ への作用素とする．このとき，ある $y\in\mathscr{H}$ に対して，$y'\in\mathscr{H}$ が存在して，$\langle y, Ax\rangle=\langle y', x\rangle$ となる．$\overline{\text{dom}\,A}=\mathscr{H}$ であるとき（このような A を $\mathscr{H}$ 上で稠密に定義された作用素という），対応 $y\longmapsto y'$ を $y'=A^*y$ とおくと，A^* は $\mathscr{H}$ 上の作用素となる．この A^* を A の**共役作用素**という．$A\subset A^*$ である A を**対称作用素**または **Hermite** という．とくに，dom $A=$dom A^* であるとき，$A=A^*$ と書き，A は**自己共役作用素**であるという．対称作用素 A の閉包 $\bar{A}$ は A^{**} に等しく，これが自己共役のとき，A を**本質的に自己共役**であるという．さらに，$A=\bar{A}$ のとき，dom A の部分集合 $\mathscr{D}$ が A の**芯** (core) であるとは $\overline{A\upharpoonright\mathscr{D}}$ （A の $\mathscr{D}$ への制限の閉包）$=A$ となる場合である．

A が自己共役かどうかを調べることは重要であるが，対称作用素 A が自己共役であるための必要十分条件として，（1） $\bar{A}=A$ かつ $\ker(A^*\pm iI)=\{0\}$ （$\ker Q\equiv\{x\in\mathscr{H};\ Qx=0\}$）；および （2） $\text{ran}(A\pm iI)=\mathscr{H}$，などが重要である．

$\mathscr{H}$ 上の作用素 A に対して，ある数 $M\geqq0$ が存在して，$\|Ax\|\leqq M\|x\|$ となるとき，A を**有界作用素**という．$\mathscr{H}$ 上の有界作用素の全体を $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ で表す．また，$\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ への有界作用素の全体は $\boldsymbol{B}(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2)$ で表す．$A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})\Rightarrow\text{dom}\,A=\mathscr{H}$ である．なお，$\|A\|\equiv\sup\{\|Ax\|;\ \|x\|=1\}$ で作用素 A のノルム $\|\cdot\|$ が定まり，$\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ はこのノルムに関して Banach 空間となる．

作用素 A が，$\langle x, Ax\rangle\geqq0$ $(\forall x\in\text{dom}\,A)$ のとき，A を**正の作用素**といい，$A\geqq0$ で

表す．このとき，正の作用素 B が一意に存在して $A=B^2$ と書け，この B は $A^{1/2}$, $\sqrt{A}$ などと表される．なお，複素 Hilbert 空間上の正の作用素はつねに自己共役作用素であるが，実 Hilbert 空間上では正の作用素でも自己共役であるとは限らない．

以下，A を $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の元とする．$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の元の性質はより一般的に付章2節において論じられるので，ここではいくつかの定義と極分解定理のみを記しておこう．次の作用素は重要である．（1） A が**正規作用素** $\overset{\text{def}}{\iff} A^*A=AA^*$. （2） A が**射影作用素** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A=A^*=A^2$. （3） A が**等距離作用素** $\overset{\text{def}}{\iff} \|Ax\|=\|x\|$ $(\forall x\in\mathcal{H})$. （4） A が**ユニタリー作用素** $\overset{\text{def}}{\iff} \langle Ax, Ay\rangle=\langle x, y\rangle$ $(\forall x, y\in\mathcal{H})$ かつ $\mathrm{ran}\,A=\mathcal{H}$. （5） A が**半等距離作用素** $\overset{\text{def}}{\iff}$ A が $(\ker A)^\perp$ 上で等距離作用素. ($(\ker A)^\perp$ を A の**初期空間**, $\mathrm{ran}\,A$ を A の**終空間**といい，$A^*A=P_{(\ker A)^\perp}$, $AA^*=P_{\mathrm{ran}\,A}$. ここで $P_{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{H}$ からその部分空間$\mathcal{L}$への射影作用素である.)

次の定理は重要である．

〈定理 1.4〉 極分解定理：$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，半等距離作用素 W が存在して；(i) $A=W|A|$；(ii) $|A|=W^*A$；(iii) $A^*=W^*|A^*|$；(iv) $|A^*|=W|A|W^*$. ここで，$|A|=\sqrt{A^*A}$ である．なお，この分解は一意で，$W:|A|x\to Ax$ の初期空間は $\overline{\mathrm{ran}\,|A|}$ で終空間は $\overline{\mathrm{ran}\,A}$ である．さらに，A が正規作用素であるか，$\mathcal{H}$ が有限次元であるときは，W はユニタリー作用素になる．

註 A が非有界作用素でも，A が $\overline{\mathrm{dom}\,A}=\mathcal{H}$ を満たす閉作用素であれば上と同様の定理が成立する．

1.3 スペクトル

$\mathcal{H}$ 上の作用素 A；$\mathrm{dom}\,A\to\mathrm{ran}\,A$ が逆写像 $A^{-1}:\mathrm{ran}\,A\to\mathrm{dom}\,A$ をもつのは A が1対1写像の場合であるが，ある複素数 λ に対して，$(A-\lambda I)^{-1}$ の存在に関連して，複素数の全体 $\boldsymbol{C}$ が以下のように分類される．

（1） **リゾルベントの集合**：$\mathrm{Re}(A)=\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,(A-\lambda I)^{-1}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\}$

（2） **スペクトルの集合**：$\mathrm{Sp}(A)=\boldsymbol{C}-\mathrm{Re}(A)$ ($\mathrm{Re}(A)$ の補集合). スペクトル集合 $\mathrm{Sp}(A)$ は，さらに，以下の3つの集合に分けられる．

（3） **点スペクトルの集合**：$\mathrm{Sp}^{(p)}(A)=\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,(A-\lambda I)^{-1}$ が存在しない$\}$

（4） **連続スペクトルの集合**：$\mathrm{Sp}^{(c)}(A)=\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,(A-\lambda I)^{-1}$ は存在するが非有界で $\overline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)}=\mathcal{H}\}$.

（5） **剰余スペクトルの集合**：$\mathrm{Sp}^{(r)}(A)=\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,(A-\lambda I)^{-1}$ が存在するが非有界で $\overline{\mathrm{ran}(A-\lambda I)}\neq\mathcal{H}\}$.

なお，$\mathrm{ran}(A-\lambda I)=\mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}$ である．

各スペクトル集合は互いに素であり，$\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Sp}^{(p)}(A)\cup\mathrm{Sp}^{(c)}(A)\cup\mathrm{Sp}^{(r)}(A)$ を満た

す．

ある $\lambda\in\boldsymbol{C}$ において，点列 $\{x_n\}\subset\mathscr{H}$ ($\|x_n\|\geqq 1$) が存在して，$\|(A-\lambda I)x_n\|\to 0$ となるとき，λ を**近似点スペクトル**という．このスペクトルの集合を $\mathrm{Sp}^{(a.p)}(A)$ で表す．このとき，（1） $\mathrm{Sp}^{(p)}(A)\cup\mathrm{Sp}^{(c)}(A)\subset\mathrm{Sp}^{(a.p)}(A)\subset\mathrm{Sp}(A)$．（2） $\mathrm{Sp}^{(r)}(A)=\emptyset$ であれば，$\mathrm{Sp}^{(a.p)}(A)=\mathrm{Sp}(A)$ が成立する．

$\mathrm{Sp}^{(p)}(A)$ の元 λ を A の**固有値**といい，この λ に対して，$Ax=\lambda x$ となる $x\in\mathscr{H}$ を固有値 λ に対する**固有ベクトル**という．固有ベクトル x の全体の作る $\mathscr{H}$ の部分空間 $\mathscr{H}_\lambda$ を λ の**固有空間**といい，その次元 $\dim\mathscr{H}_\lambda$ を λ の**重複度**（または，**多重度**）という．重複度が1の固有値を**単一**（または，**非縮退**）スペクトルとよぶ．

有界作用素のスペクトルに関する様々な性質は，付章 2.2 項および付章 2.3 項でより一般的な定式化の下で再び取り上げる．

$\mathscr{H}$ 上の射影作用素の族 $\{E_\lambda ; -\infty\leq\lambda\leq\infty\}$ が（i） $E_\lambda E_\mu=E_\mu E_\lambda=E_\lambda(\lambda\leq\mu)$，（ii） $E_\lambda\to 0$ ($\lambda\to-\infty$)，（iii） $E_\lambda\to I$ ($\lambda\to+\infty$) を満たすとき，$\{E_\lambda\}$ を**スペクトル測度**または**単位の分解**という．以下 $\{E_\lambda\}$ はスペクトル測度とする．$\{E_\lambda\}$ は次の性質を有する．

1° 右強連続性 $E_{\lambda_n}\downarrow E_\lambda$ ($\lambda_n\downarrow\lambda$) をもち，左強極限 $E_{\lambda-0}$ が存在する $(E_{\lambda_n}\uparrow E_{\lambda-0}(\lambda_n\uparrow\lambda))$．

2° $\left\{x\in\mathscr{H} ; \int_{\boldsymbol{R}}\lambda d\|E_\lambda x\|^2<+\infty\right\}^{-}=\mathscr{H}$.

3° $A=\int_{\boldsymbol{R}}\lambda dE_\lambda$ とおく $\left(\text{i. e.,}\langle x, Ay\rangle=\int_{\boldsymbol{R}}\lambda d\langle x, E_\lambda y\rangle, \forall x, y\in\mathscr{H}\right)$ と，A は自己共役作用素となる．

3° の逆である次の定理が**スペクトル分解定理**といわれるものである．

〈定理 1.5〉 自己共役作用素 A に対して，スペクトル測度 $\{E_\lambda\}$ が一意に存在して，$A=\int_{\boldsymbol{R}}\lambda dE_\lambda$ と表せる．

この定理において，『$E_{\lambda-0}\neq E_\lambda \Longleftrightarrow \lambda\in\mathrm{Sp}^{(p)}(A)$』であり，このとき，$\mathrm{ran}(E_\lambda-E_{\lambda-0})$ は λ の固有空間になる．また，上の作用素 A において，$\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Sp}^{(p)}(A)=\{\lambda_n\}$ のとき，$P_n=E_{\lambda_n}-E_{\lambda_n-0}$ とおくと，$P_nP_m=\delta_{nm}P_n$ で，$A=\sum_n\lambda_nP_n$ と表せる．

1.4 $\boldsymbol{F}(\mathscr{H})$ 及び $\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$

Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の任意の元 x, y に対して作用素 $x\otimes\bar{y}$ を

$$(x\otimes\bar{y})z=\langle y, z\rangle x,\quad \forall z\in\mathscr{H}$$

で定めると，$x\otimes\bar{y}\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ かつ，$\mathrm{ran}\,x\otimes\bar{y}=\{\lambda x ; \lambda\in\boldsymbol{C}\}$ は $x\neq 0$ のとき1次元閉部分空間であり，$x=0$ のときは1点集合$\{0\}$である．$x\otimes\bar{y}$ の作用素ノルム $\|x\otimes\bar{y}\|$ は $\|x\|\|y\|$ に等しい．さらに次の性質が容易に証明される．

1° $(x\otimes\bar{y})^*=y\otimes\bar{x}$，$(\alpha x)\otimes\overline{(\beta y)}=\alpha\bar{\beta}x\otimes\bar{y}$，$\forall\alpha, \beta\in\boldsymbol{C}$.

2° $(x+y)\otimes\bar{z}=x\otimes\bar{z}+y\otimes\bar{z}$，$x\otimes\overline{(y+z)}=x\otimes\bar{y}+x\otimes\bar{z}$.

3° $(x_1\otimes\bar{y}_1)(x_2\otimes\bar{y}_2)=\langle y_1, x_2\rangle x_1\otimes\bar{y}_2$.

4° $A(x\otimes\bar{y})=Ax\otimes\bar{y}$, $(x\otimes\bar{y})A=x\otimes\overline{A^*y}$, $\forall\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$.
この作用素 $x\otimes\bar{y}$ を x と y の **Schatten 積**（あるいは，von Neumann-Schatten 積）という．これは **Dirac の記号**：ブラ・ケットを使うと，$x\otimes\bar{y}=|x\rangle\langle y|$ と表せる．このDirac 記号では，内積は $\langle x,y\rangle=\langle x|y\rangle$ と書かれることが多い．

$\{x_j\,;\,j\in J\}$，$\{y_j\,;\,j\in J\}$ を $\mathcal{H}$ の 2 つの ONS とし，$\mathcal{J}=\{\alpha\,;\,\alpha\subset J$ 有限集合$\}$ とすると，$A_\alpha=\sum_{j\in\alpha}\lambda_j x_j\otimes\bar{y}_j$ $(\sup_{j\in J}|\lambda_j|\leqq M<\infty)$ はある $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に一意に強収束し (i. e., $\|A_\alpha x-Ax\|\to0$)，この A を $A=\sum_{j\in J}\lambda_j x_j\otimes\bar{y}_j$ で表す．この A に関して，次が成立する．

5° $A^*=\sum_j\bar{\lambda}_j y_j\otimes\bar{x}_j$, $A^*A=\sum_j|\lambda_j|^2y_j\otimes\bar{y}_j$, $AA^*=\sum_j|\lambda_j|^2x_j\otimes\bar{x}_j$. および $|A|=\sum_j|\lambda_j|y_j\otimes\bar{y}_j$.

6° $\|A\|=\|A^*\|=\|A^*A\|^{1/2}=\||A|\|$.

7° $A^{-1}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\Longleftrightarrow\{x_j\},\{y_j\}$ は $\mathcal{H}$ は CONS で定数 $c_1\geqq c_2>0$ が存在して，$c_1\geq|\lambda_j|\geq c_2(\forall j)$．このとき，$A^{-1}=\sum_j\lambda_j^{-1}y_j\otimes\bar{x}_j$.

次の結果は有用である．

〈定理 1.6〉 $\mathcal{H}$ 上の作用素 A において，

（1） A が射影作用素 $\Longleftrightarrow\overline{\mathrm{ran}\,A}$ の CONS$\{x_j\}$ に対して，$A=\sum_j x_j\otimes\bar{x}_j$.

（2） A がユニタリー作用素 $\Longleftrightarrow\mathcal{H}$ の CONS$\{x_j\},\{y_j\}$ が存在して，$A=\sum x_j\otimes\bar{y}_j$.

（3） A が等距離作用素 $\Longleftrightarrow\mathcal{H}$ の ONS$\{x_j\}$ と CONS$\{y_j\}$ が存在して，$A=\sum x_j\otimes\bar{y}_j$.

（4） A が半等距離作用素 $\Longleftrightarrow\mathcal{H}$ の ONS$\{x_j\},\{y_j\}$ が存在して，$A=\sum x_j\otimes\bar{y}_j$.

ところで，$\dim(\mathrm{ran}\,A)<\infty$ である作用素 $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を**有限階作用素**といい，この作用素の全体を $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$ で表す．$A\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$ であることと，$n\in\boldsymbol{N}$, $\{\lambda_j\}\subset\boldsymbol{R}$, ONS$\{x_j\}$ および $\{y_j\}$ が存在して $A=\sum_{j=1}^n\lambda_j x_j\otimes\bar{y}_j$ と表せることは同値である．

2 つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ の間の作用素$A:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ が**完全連続**（以下 c. c. と略）または**コンパクト**であるとは，有界集合 $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$ の A による像 $A\mathcal{L}$ が全有界（すなわち，コンパクトな閉包をもつ）場合をいう．c. c. 作用素の全体を $\boldsymbol{C}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ で表す．このとき，次のことが容易に示される．

8° A が c. c. $\Longleftrightarrow x_n\xrightarrow{w}x$ (i. e.,$\langle y,x_n\rangle\to\langle y,x\rangle$, $\forall y\in\mathcal{H}$．この収束を**弱 (weak) 収束**という) ならば $Ax_n\xrightarrow{s}Ax$ (i. e.,$\|Ax_n-Ax\|\to0$; **強 (strong) 収束**).

9° $\{A_n\}\subset\boldsymbol{C}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ で $A_n\xrightarrow{u}A$ (すなわち，作用素(一様)ノルム $\|Q\|\equiv\sup\{\|Qx\|;x\in\mathcal{H}_1,\|x\|=1\}$ において，$\|A_n-A\|\to0$; **一様収束またはノルム収束**) で $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ ($\|A\|<\infty$ なる作用素の全体) であるとき，$A\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$.

10° $\boldsymbol{C}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ は作用素ノルムに関して，Banach 空間 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ の閉部分空間であり，したがって $\boldsymbol{C}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ 自身 Banach 空間である．

以下，$\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_2=\mathcal{H}$ の場合，すなわち，$\boldsymbol{C}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)=\boldsymbol{C}(\mathcal{H},\mathcal{H})\equiv\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ の元に関し

て議論しよう．上記の 8°～10° に加えて，

11°　$C(\mathscr{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の両側イデアルである．

12°　$A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ において，A, A^*, $|A|$, $|A^*|$ のいずれか 1 つが c. c. ならば他も c. c. である．

13°　$\lambda_j\to 0$ の点列 $\{\lambda_j\}\subset\boldsymbol{C}$ と 2 つの ONS $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ に対して，$A=\sum\lambda_j x_j\otimes\bar{y}_j$ は c. c. である．

14°　$A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ ならば，$x\in\mathscr{H}$ が存在して，$|\langle x, Ax\rangle|=\max\{|\langle y, Ay\rangle|\,;\, y\in\mathscr{H}, \|y\|=1\}$．さらに $A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ が自己共役ならば，$x\in\mathscr{H}$ が存在して，$\|A\|=|\langle x, Ax\rangle|$．また，この x は A の固有ベクトルである．すなわち．$Ax=\lambda x$ (λ は $\|A\|$ または $-\|A\|$)．

〈定理 1.7〉 固有値展開定理： 自己共役な $A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ は次の性質を有する．

（1） $\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Sp}^{(p)}(A)\cup\{0\}\subset\boldsymbol{R}$ で集合 $\mathrm{Sp}(A)$ は高々可算である．また，0 以外の固有値は有限な重複度をもち，次のように整列化できる．λ_1 を $|\lambda_1|=\|A\|$ ととり，その重複度を n_1 とすると $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n_1}$，次に λ_{n_1+1} を $|\lambda_{n_1+1}|=\max\{|\lambda|\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)-\{\lambda_1\}\}$ ととり，その重複度を n_2 とすると，$\lambda_{n_1+1}=\lambda_{n_1+2}=\cdots=\lambda_{n_1+n_2}$，以下帰納的に λ_n を定める．このとき，列 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ は有限回で終るか，$|\lambda_n|\downarrow 0$ である．

（2） 各 $\lambda_n\in\mathrm{Sp}^{(p)}(A)$ における固有ベクトル $x_n(\|x_n\|=1)$ を $x_n\perp x_m(m\neq n)$ と選んで，$A=\sum\lambda_n x_n\otimes\bar{x}_n$ と表せる．固有値に縮退がなければ，上記の分解は一意である．

（3） $\mathcal{L}=\overline{\mathrm{span}}\{x_n\,;\,n=1,2\cdots\}$，$\mathcal{K}=\{z\in\mathscr{H}\,;\,Az=0\}$ とおくと，$\mathcal{L}=\mathcal{K}^{\perp}$ であり，$y=\sum\langle x_n, y\rangle+P_{\mathcal{K}}y$，$Ay=\sum\lambda_n\langle x_n, y\rangle x_n$ $(\forall y\in\mathscr{H})$．

〈定理 1.8〉 min-max の原理： $A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ が正のとき，A の固有値 $\{\lambda_n\}$ は次の min-max 形式で求められる．

$$\lambda_n=\min\{\max\{\langle Ax, x\rangle\,;\,\|x\|=1,\ x\perp\mathcal{L}\}\,;\,\dim\mathcal{L}=n-1\}$$

ここで，$\mathcal{L}$ は $(n-1)$ 次元の $\mathscr{H}$ の閉部分空間である．(λ_1 は 14° で求まる λ と同じ固有値である．)

15°　$A, B\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ とも自己共役とする．$AB=BA$ であること，と ONS $\{x_n\}\subset\mathscr{H}$ が存在して，$A=\sum\lambda_n x_n\otimes\bar{x}_n$，$B=\sum\mu_n x_n\otimes\bar{x}_n$ と表せることは同値である．

16°　すべての $A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ に対して一意に $0\leqq\lambda_n\downarrow 0$ なる点列 $\{\lambda_n\}$ が存在して（これは $|A|$ の固有値），適当に ONS $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を選ぶと，$A=\sum_n\lambda_n x_n\otimes\bar{y}_n$ と表せる．逆に，上式で表される A は 13° で述べたようにつねに c. c. である．

さらに，次の結果も有用である．

17°　自己共役作用素 A において，ある自然数 n に対して，$A^n\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ であれば，A それ自身 c. c. である．

なお，これまでの議論より，$\boldsymbol{F}(\mathscr{H})\subset\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ であることは明らかであろう．

1.5 $S(\mathcal{H})$

$A\in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ と，任意の 2 つの CONS$\{x_j\}$, $\{y_j\}\subset\mathcal{H}$ に対して，次の 3 つの無限級数

$$\sum_j \|Ax_j\|^2,\quad \sum_j \|A^*y_j\|^2,\quad \sum_{i,j} |\langle y_j, Ax_i\rangle|^2$$

の何れか 1 つが収束すれば他も収束し，極限値は一致する．このとき，A を **Schmidt 作用素**（または，Hilbert-Schmidt 作用素）といい，Schmidt 作用素の全体を $S(\mathcal{H})$ で表す．

任意の CONS$\{x_j\}$ と $A\in S(\mathcal{H})$ に対して，$\|A\|_2=\sum_j \|Ax_j\|^2$ とおくと，$\|\cdot\|_2$ はノルム（**Schmidt ノルム**）となり，これに関して $S(\mathcal{H})$ は Banach 空間になる．$S(\mathcal{H})$ の元 A, B は次の性質を有する．

1° $\|x\otimes\bar{y}\|_2=\|x\|\|y\|$, $\forall x, y\in\mathcal{H}$

2° $\|A\|\leqq\|A\|_2$, $\|A^*\|_2=\|A\|_2$, $\|AB\|_2\leqq\|A\|\|B\|_2$, $\|BA\|_2\leqq\|A\|\|B\|_2$.　よって，$S(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである．

3° $A\in S(\mathcal{H})\Rightarrow |A|\in S(\mathcal{H})$, $\||A|\|_2=\|A\|_2$.

なお，任意の A, $B\in S(\mathcal{H})$ と，任意の CONS$\{x_j\}$ に対して，$\langle\!\langle A, B\rangle\!\rangle=\sum_j\langle Ax_j, Bx_j\rangle$ とおくと，これは $\{x_j\}$ の選び方によらず，絶対収束し，$S(\mathcal{H})$ はこの内積 $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ に関して，Hilbert 空間になる．さらに，$\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ は次の性質を有する．

4° $\langle\!\langle x\otimes\bar{y},\ u\otimes\bar{v}\rangle\!\rangle=\langle x, u\rangle\langle v, y\rangle$, $\forall x, y, u, v\in\mathcal{H}$.

5° A, $B\in S(\mathcal{H})$, $C\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\langle\!\langle A^*, B^*\rangle\!\rangle=\langle\!\langle B, A\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle CA, B\rangle\!\rangle=\langle\!\langle A, C^*B\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle AC, B\rangle\!\rangle=\langle\!\langle A, BC^*\rangle\!\rangle$.

なお，次の結果は重要である．

6° $S(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$.

このことより，任意の $A\in S(\mathcal{H})$ は $A=\sum_j\lambda_j x_j\otimes\bar{y}_j$ と表されることがわかる．また，c. c. 作用素 $A=\sum_j\lambda_j x_j\otimes\bar{y}_j$ が $A\in S(\mathcal{H})$ である必要十分条件は $\sum_j|\lambda_j|^2<\infty$ であることもわかる．

1.6 $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$

任意の CONS$\{x_j\}$ に対して，無限級数 $\sum_j\langle x_j, Ax_j\rangle$ が絶対収束するとき，その値は CONS$\{x_j\}$ の取り方によらない．この $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を**トレースクラスの作用素**といい，これの全体を $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ で表す．以下，$\sum_j\langle x_j, Ax_j\rangle$ を $\mathrm{tr}\,A$ と書く．

1° 次は同値である．（1） $A\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$.（2） $|A|\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$.（3） $|A|^{1/2}\in S(\mathcal{H})$.（4） $\mathrm{tr}\,|A|<\infty$.

2° 任意の $A, B\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ と任意の $\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}$ に対して $\alpha A+\beta B\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$, $A^*\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$.

$\|A\|_1=\mathrm{tr}|A|$ ($\forall A\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$) とおくと，この $\|\cdot\|_1$ はノルムになり，$\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ は Banach 空間となる．

3° $\mathrm{tr}\, x\otimes\bar{y}=\langle y, x\rangle$, $\|x\otimes\bar{y}\|_1=\|x\|\|y\|$, $\forall x, y\in\mathcal{H}$.

4° $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである.

5° $\|A\|\leqq\|A\|_2\leqq\|A\|_1$.

6° $A\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})\Longleftrightarrow B,\ C\in\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ が存在して, $A=BC$.

7° 任意の $A=\sum\lambda_j x_j\otimes y_j\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$, $(\lambda_j\geqq 0)$ が $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ の元 $\Longleftrightarrow\sum\lambda_j<\infty$. このとき, $\|A\|_1=\sum\lambda_j$.

4°, 5° より $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ であることがわかる.

この節の最後に, 次の空間 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$, $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$, $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$, $\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$, $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ の関連について論じよう. これらは*代数（付章 2.1 項参照）であり, さらに,

〈定理 1.9〉 $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{T}(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{S}(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{C}(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$

の包含関係がある.（ここで包含関係⊂は部分代数, 両側イデアルという代数的意味合いも含まれている.）さらに,

（1） $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$ は他の各々の空間の最小イデアルである. また $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の一様ノルムで閉じたイデアルであり, 特に, $\mathcal{H}$ が可分ならば, 最大イデアルである.

（2） 次が成立する. （i） $\overline{\boldsymbol{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|_1}=\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$. （ii） $\overline{\boldsymbol{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|_2}=\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$. (iii) $\overline{\boldsymbol{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|}=\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$.

（3） 各 $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$, $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$, $\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$, $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ で弱位相（収束が $A_n\xrightarrow{w}A$ で与えられる位相（付章 2.6 項））に関して稠密.

今, Banach 空間 X 上の**有界線形汎函数** φ（すなわち, $\varphi: X\to\boldsymbol{C}$ が線形, かつ $|\varphi(A)|\leqq M\|A\|$, $0<M<+\infty$）の集合を X^* で表す. このとき任意の $\varphi\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^*$ に対して, 一意に $T_\varphi\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ が存在して, $\varphi(A)=\mathrm{tr}\, T_\varphi A\,(\forall A\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H}))$ と書ける. 逆に, 任意の $T\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ に対して, $\varphi_T(A)=\mathrm{tr}\, TA$ $(\forall A\ni\boldsymbol{C}(\mathcal{H}))$ とおくと, $\varphi_T\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^*$ である. また, $\|T\|_1=\|\varphi_T\|\equiv\sup\{|\varphi_T(A)|\,;\,A\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H}),\ \|A\|=1\}$ が満たされる. 同様に, 任意の $\psi\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})^*$ に対して一意に $B_\psi\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在して, $\psi(A)=\mathrm{tr}\, AB_\psi(\forall A\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}))$. 逆に, 任意の $B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して, $\psi_B(A)=\mathrm{tr}\, AB$ $(\forall A\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}))$ とおくと, $\psi_B\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})^*$ となり, $\|B\|=\|\psi_B\|$.

$T\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ と $\varphi_T\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^*$, $B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ と $\psi_B\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})^*$ を同一視することにより, 次の定理が得られる.

〈定理 1.10〉 次が成立. （1） $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^*=\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$. （2） $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})^*=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$. （3） $\boldsymbol{S}(\mathcal{H})^*=\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$. （4） $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})^*=\boldsymbol{T}(\mathcal{H})\oplus\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^\perp$. ただし, $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^\perp$ は集合 $\{\varphi\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})^*\,;\,\varphi(A)=0,\ \forall A\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})\}$ である.

1.7 線形位相空間における基本定理

位相空間 X が K 上の線形空間であり, 写像 $(x, y)\in X\times X\longmapsto x+y\in X$, および

$(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{K}\times X\to \alpha x\in X$ が連続であるとき X を**線形位相空間**という．以下，線形位相空間の基本的性質をごく簡単にまとめておく．

線形空間 X 上の写像 $p: X\to \boldsymbol{R}^+$ が，任意の $x, y\in X$ および $\lambda\in \boldsymbol{K}$ に対して，（i）$p(x+y)\leqq p(x)+p(y)$，（ii） $p(\lambda x)=|\lambda| p(x)$ を満たすとき，p を X 上の**半ノルム**という．半ノルムの族 $\{p_j ; j\in J\}$ が X の元を**分離する**とは，すべての $j\in J$ に対して，$p_j(x)=0$ ならば $x=0$ となることである．また，X 上に位相を，“$x_\alpha\to x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} p_j(x_\alpha-x)\to 0\ (\forall j\in J)$” で導入すると，$X$ は**局所凸** (i. e., $0\in X$ の近傍基の要素が凸) な線形位相空間になる．逆に，局所凸な線形位相空間にはこのような半ノルムの族が存在する．さらに，Xの元を分離する半ノルムの族が存在することと，X が**局所凸 Hausdorff 空間**であることとは同値である．したがって，ノルム空間は局所凸 Hausdoff 空間である．

〈定理 1.11〉 Hahn-Banach の拡張定理：Xを実 (resp. 複素) 線形空間，p を X 上の半ノルム，Y を X の部分空間，φ を任意 $y\in Y$ に対して，$\varphi(y)\leqq p(y)$ (resp. $|\varphi(y)|\leqq p(y)$) を満たす Y 上の実 (resp. 複素) 線形汎函数とする．このとき，X 上の実 (resp. 複素) 線形汎函数 $\tilde{\varphi}$ が存在して，$\tilde{\varphi}\restriction Y$ (Y への制限)$=\varphi$ かつ $\tilde{\varphi}(x)\leqq p(x)$ (resp. $|\tilde{\varphi}(x)|\leqq p(x)$)，$\forall x\in X$.

この定理の系として，次の結果は有用である．ただし，以下 X をノルム空間，Y を X の部分空間，X^* を X 上の有界線形汎函数の全体とする．

1° Y 上の有界線形汎函数 p_0 に対して，$\varphi\in X^*$ が存在し，$\varphi_0=\varphi\restriction Y$ かつ，$\|\varphi_0\|_Y=\|\varphi\|$ が成り立つ．

2° $x\in X$, $\|x\|\neq 0$ に対して，$\varphi(x)=\|\varphi\|\cdot\|x\|$ となる $\varphi\in X^*$ が存在する．

3° $x\in X$ と Y の距離を r とするとき，$\|\varphi\|\leqq 1$, $\varphi(x)=r$, $\varphi(y)=0$ $(\forall y\in Y)$ を満たす $\varphi\in X^*$ が存在する．

〈定理 1.12〉 Banach-Steinhaus（一様有界性）の定理：X を Banach 空間，Y をノルム空間とし，$\mathcal{F}$ を $\boldsymbol{B}(X, Y)$ (X から Y への有界線形変換の全体) の部分集合とする．このとき，任意の $x\in X$ で $\{\|Tx\|_Y ; T\in\mathcal{F}\}$ が有界であれば，$\mathcal{F}$ は一様有界である (i. e., $\sup\{\|\boldsymbol{T}\| ; T\in\mathcal{F}\}<+\infty$).

以下，しばらく X, Y を Banach 空間とする．

4° $\xi: X\times Y\leftarrow \boldsymbol{C}$ において，$\xi(x,\cdot)\in Y^*$, $\xi(\cdot, y)\in X^*$ のとき，$\xi(\cdot,\cdot)$ は**同時連続**である (i. e., $x_n\to 0$, $y_n\to 0 \Longrightarrow \xi(x_n, y_n)\to 0$).

5° **開写像定理：**$T\in \boldsymbol{B}(X, Y)$ が上への写像のとき，T は開写像である（すなわち，T は開集合を開集合えうつす).

6° **閉グラフ定理：**$T\in \boldsymbol{B}(X, Y)$ であることと，T のグラフ $\mathcal{G}=\{(x, Tx) ; x\in X\}$ が閉集合であることとは同値.

ここで，弱位相について簡単に記しておこう．ある集合 X とある位相空間 Y において，$\mathcal{F}$ を X から Y への写像の族とするとき，$\mathcal{F}$ によって導入された X 上の**弱位相**（または **$\mathcal{F}$-弱位相**）とは，各 $\varphi\in\mathcal{F}$ を連続にする最も弱い位相のことである．この位相は $\{\varphi^{-1}(0)\,;\,\varphi\in\mathcal{F},\ 0$ は Y の開集合$\}$ によって生成され，この位相におけるネット $\{x_\alpha;\alpha\in J\}$ の収束（**弱収束**といい，$x_\alpha\xrightarrow{w}x$ とかく）は $\lim_\alpha\varphi(x_\alpha)=\varphi(x)$ $(\forall\varphi\in\mathcal{F})$．によって決められている．したがって，弱位相は**各点収束の位相**である．なお，Y が Hausdorff 空間であり，$\mathcal{F}$ が X の元を**分離する**（i. e., $\varphi(x)=\varphi(y)$, $\forall\varphi\in\mathcal{F}\Rightarrow x=y$）ならば，$X$ の弱位相も Hausdorff 位相である．

さて，$\mathcal{F}\subset\boldsymbol{L}(X,\boldsymbol{C})$（$X$ から $\boldsymbol{C}$ への線形変換の全体）で $\mathcal{F}$ が X の元を分離すれば，X 上の $\mathcal{F}$-弱位相（$\sigma(X,\mathcal{F})$ 位相と書く）は $\mathcal{F}$ の各元を連続にする X 上の最も弱い位相である．この $\sigma(X,\mathcal{F})$ 位相は半ノルム $\{p_\varphi\,;\,p_\varphi(x)=|\varphi(x)|,\ \varphi\in\mathcal{F}\}$ によって生成される局所凸 Hausdorff 位相である．同様に，$\sigma(X,X^*)$ 位相，$\sigma(X^*,X)$ 位相も定義され，それぞれ X の弱位相，X^* の**弱＊位相**という．X_1 を Banach 空間 X の単位球（i. e., $X_1=\{x\in X\,;\,\|x\|\leqq1\}$）とすると

〈**定理 1.13**〉 **Bauach-Alaoglu の定理**：$(X^*)_1$ は弱＊位相でコンパクトである．

局所コンパクト Hausdorff 空間 X において，$C_0(X)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ が＊部分代数（付章 2.1 項）であるとする．また，集合 $K(\mathcal{A})$ を $\{x\in X\,;\,f(x)=0,\ f\in\mathcal{A}\}$ と定める．このとき

〈**定理 1.14**〉 **Stone-Weierstrass 定理**：$\mathcal{A}\subset C_0(X)$ が X の元を分離し，$K(\mathcal{A})=\emptyset$ のとき，$\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|}=C_0(X)$．また，$X$ がコンパクトの場合は，$\mathcal{A}\subset C(X)$ が X の元を分離し，$\mathcal{A}\ni1$ であれば $\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|}=C(X)$ となる．

線形空間 X の凸集合 K の点 x が，いかなる K の 2 点 x_1, x_2 と数 $\lambda\in(0,1)$ に対しても，$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ と表せない場合，x を K の**端点**（extreme point）であるといい，端点の集合を $\mathrm{ex}\,K$ で表す．また，X のある部分集合 Y の**凸包**（convex hull）とは Y を含む最小の凸集合のことであり，これを $\mathrm{co}\,Y$ で表し，その閉包を $\overline{\mathrm{co}}\,Y$ で表す．このとき次の有用な定理が成立する．

〈**定理 1.15**〉 **Krein-Mil'man 定理**：局所凸線形位相空間 X のコンパクトな凸集合 K において，（1） $\mathrm{ex}\,K\neq\emptyset$；（2） $K=\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ex}\,K$.

その他の重要な定理を列記しておこう．以下，とくに断わらなければ X を Banach 空間，Y をその部分集合とする．

7° Grothendieck 定理：$\varphi\in X^{**}$ が弱＊位相で連続であることと $\varphi\restriction X_1^*$ が相対弱＊

位相で連続であることは同値.

8° **Eberlein-Šmulian 定理**：Y が相対弱コンパクト（すなわち，Y の弱位相での閉包 $\bar{Y}^w$ がコンパクト）であることと Y が弱点列コンパクト（すなわち，任意の $\{y_n\}\subset Y$ に対して，部分列 $\{y_{n_k}\}$ と $y\in Y$ が存在して，$y_{n_k}\xrightarrow{w}y$）であることは同値.

9° **Krein-Šmulian 定理**：K を X^* の凸部分集合とする．このとき，K が弱＊位相で閉であることと $K\cap rX_1^*$ $(r>0)$ が弱＊位相で閉であることは同値.（$rX_1^*\equiv\{\varphi\in X^*;\ \|\varphi\|\leqq r\}$.）

10° **Kakutani-Markov の不動点定理**：K をある線形位相空間 X の空でないコンパクトな凸部分集合とする．さらに，ξ を X から X への連続なアフィン写像で，$\xi(K)\subset K$ を満たすものとする．このとき，$\xi(x_0)=x_0$ となる $x_0\in K$ が存在する.

最後に Bochner 積分について概説する．$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ をある測度空間，X を Banach 空間，f を Ω から X への写像とする．このとき，

（1） f が（X-値）**単函数**であるとは，$\mu(A_k)<\infty$ となる有限個の互いに素な可測集合 $\{A_k\}_{k=1}^n$ に対して，$f(\omega)=x_k$ $(x_k\in X_0\neq 0)$，$\forall\omega\in A_k$ かつ，$f(\omega)=0$，$\forall\omega\in\Omega-\bigcup_{k=1}^n A_k$ となる場合をいう.

（2） f が**強可測**であるとは，単函数の列 $\{f_n\}$ が存在して，$\|f_n(\omega)-f(\omega)\|\to 0$ (μ-a.e) となる場合をいう.

（3） f が**弱可測**であるとは，任意の $\varphi\in X^*$ に対して，$\omega\longmapsto\varphi(f(\omega))$ が可測函数となる場合をいう.

当然，“（2）⇒（3）” が成立する．なお，この可測性に関して，

11° X が可分なとき，$f:\Omega\to X$ が強可測であることと弱可測であることは同値.

さて，Bochner 積分の定義に移ろう．$f:\Omega\to X$ を単函数とし，$f(\omega)=x_k$ $(\forall\omega\in A_k)$ とする．このとき，f の Ω 上の積分を

$$\int_\Omega f\,d\mu\equiv\sum_{k=1}^n x_k\mu(A_k)$$

と定め，これを f の Bochner 積分という．さらに，一般の函数 $f:\Omega\to X$ に対して，単函数の列 $\{f_n\}$ が存在して，$\|f_n(\omega)-f(\omega)\|\to 0$ (μ-a.e.) および，$\int_\Omega\|f_n-f\|d\mu\to 0$ が満たされるとき，f は **Bochner 可積分**であるといい，積分

$$\int_\Omega f\,d\mu=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu$$

を **Bochner 積分**という.

12° 強可測な函数 $f:\Omega\to X$ が Bochner 可積分であることと $\omega\longmapsto\|f(\omega)\|$ が可積分函数であることとは同値，

この章の結果は文献［R 2, S 3, Y 2］などに詳しく論じられている.

2. 作用素代数

この付章では，作用素代数の基本的な結果を概説する．

2.1 各種の代数

ある集合 $\mathcal{A}$ が係数体 $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$) 上の**代数**であるときは，(i) $\mathcal{A}$ が $\boldsymbol{K}$ 上の線形空間，(ii) $\mathcal{A}$ において積が定義されていて，$\mathcal{A}$ はこの積に関して閉じている (i. e., $A, B\in\mathcal{A}\Rightarrow AB\in\mathcal{A}$)，(iii) 任意の $A, B, C\in\mathcal{A}$ に対して，$A(BC)=(AB)C$ かつ $A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$，を満たす場合をいう．さらに，任意の $A, B\in\mathcal{A}$ に対して，$AB=BA$ となるとき，$\mathcal{A}$ は**可換代数**であるという．可換でない代数を**非可換代数**といい，量子系などを記述するのに有用なものである．

代数 $\mathcal{A}$ の単位元を I (i. e., $IA=AI=A$, $\forall A\in\mathcal{A}$) で表す．これは存在すれば一意である．すべての代数が単位元を含むとは限らないが，単位元を含んでいない代数は，それを含む代数に容易に拡張できるので，本書ではとくに断らない限り，$\mathcal{A}\ni I$ としている (〈定理 2.8〉参照)．代数 $\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の代数構造を保存する線形空間であるとき，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の**部分代数**という．

行列または Hilbert 空間上の作用素には，しばしばそれらの Hermite 共役なるものを考える必要があるが，これに対応する概念が $\mathcal{A}$ 上にも次のように定義されている．

〔**定義 2.1**〕 $\boldsymbol{C}$ 上の代数 $\mathcal{A}$ の上の**対合** (**involution**) $*$ とは，以下の条件を満たす写像 $*: A\in\mathcal{A}\to A^*\in\mathcal{A}$ のことである．任意の $A, B\in\mathcal{A}, \lambda\in\boldsymbol{C}$ に対して，(i) $(A^*)^*=A$，(ii) $(A+B)^*=A^*+B^*$，(iii) $(\lambda A)^*=\bar{\lambda}A^*$，(iv) $(AB)^*=B^*A^*$.

この対合 $*$ をもつ代数 $\mathcal{A}$ を **$*$ 代数**とよぶ．$*$ 代数 $\mathcal{A}$ の元 $A\in\mathcal{A}$ に対して，$A=A^*$ のとき A は**自己共役**であるといい，$A^*A=AA^*$ のとき**正規**，$A^*A=AA^*=I$ のとき**ユニタリー**であるという．

$\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B}=\mathcal{B}^*\equiv\{B^*\,;\,B\in\mathcal{B}\}$ のとき，$\mathcal{B}$ は**自己共役集合**であるという．

二つの代数 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ に対して，π を $\mathcal{A}_1$ から $\mathcal{A}_2$ への準同型写像とする．このとき，$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ とも $*$ 代数で，$\pi(A^*)=\pi(A)^*$ ($\forall A\in\mathcal{A}_1$) が満たされれば，この π を **$*$ 準同型写像**という．また，π の核 $K_\pi\equiv\{A\in\mathcal{A}_1\,;\,\pi(A)=0\}$ が一点集合 $\{0\}$ のとき，π は**忠実** (faithful) であるといい，忠実な $*$ 準同型写像を **$*$ 同型写換**という．

ところで考察の対象となっている代数 $\mathcal{A}$ を，ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素の全体 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ へ移すことができれば，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の性質はよく調べられているので都合がよい．このような性質をもつ $*$ 準同型写像を $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}$ 上への**表現**とよび組 $\{\mathcal{H}, \pi\}$ で表す．

$\mathcal{A}$ の元を数量化するものとして $\mathcal{A}$ 上にノルムを導入しよう．$\mathcal{A}$ 上の**ノルム** $\|\cdot\|$ とは，$\mathcal{A}$ から $\boldsymbol{R}^+$ への写像で次の条件を満たすものをいう．任意の $A, B\in\mathcal{A}$ と $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対して，(i) $\|A\|\geqq 0$, $\|A\|=0\Longleftrightarrow A=0$，(ii) $\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$，(iii) $\|A+B\|\leqq\|A\|+\|B\|$，さらに $I\in\mathcal{A}$ のときは (iv) $\|I\|=1$.

〔**定義 2.2**〕 ノルム $\|\cdot\|$ を有する代数 $\mathcal{A}$ では次の4種類が主に有用である.

(1) $\mathcal{A}$ が**ノルム代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\|AB\| \leqq \|A\|\|B\|$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ が **Banach 代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}$ が完備なノルム代数.

(3) $\mathcal{A}$ が **Banach $*$ 代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}$ が対合 $*$ をもつ Banach 代数で, $\|A^*\| = \|A\|$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

(4) $\mathcal{A}$ が **C* 代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}$ がBanach $*$ 代数で, $\|A^*A\| = \|A\|^2$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

なお(2)における完備性はノルム $\|\cdot\|$ に関するものである. ここでいくつかの例を挙げておこう.

例 1 $n \times n$ 複素行列の全体 $M_n(\boldsymbol{C})$ は C* 代数.

例 2 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$, $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ は共に C* 代数. ただし $I \notin \boldsymbol{C}(\mathcal{H})$.

例 3 $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$, $\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ 共に Banach $*$ 代数であるが, C* 代数ではない.

例 4 局所コンパクトな Hausdorff 空間 X に対して, $\boldsymbol{C}_0(X)$ を無限遠で0になる X から $\boldsymbol{C}$ への連続な函数 $f(x)$ $(\forall x \in X)$ の全体とする. ここで $f(x)$ が無限遠で0になる $(\lim_{x\to\infty} f(x) = 0)$ とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して集合 $\{x \in X ; |f(x)| > \varepsilon\}$ が X のあるコンパクトを部分集合に含まれることを意味している. さて $\boldsymbol{C}_0(X)$ の任意の元 f, g に対して演算を (a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, (b) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ $(\forall \lambda \in \boldsymbol{C})$, (c) $(f \cdot g)(x) = f(x) g(x)$ と定め, 対合とノルムを $f^*(x) = \overline{f(x)}$ および $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$ で入れると, $\boldsymbol{C}_0(X)$ は可換な C* 代数となる. ただし $I \notin \boldsymbol{C}_0(X)$. なお『$X$ がコンパクト $\Longleftrightarrow \boldsymbol{C}_0(X) = \boldsymbol{C}(X) \ni I$』が知られている ($\boldsymbol{C}(X)$ は X 上の連続函数の全体).

C* 代数 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{A}$ の**可換子代数** (commutant) $\mathcal{A}'$ (これは実際に代数となる) とは, $\mathcal{A}$ のすべての元と可換な $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の元の集合である. すなわち,

$$\mathcal{A}' \equiv \{A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) ; [A, B] = AB - BA = 0, \ \forall B \in \mathcal{A}\}.$$

この $\mathcal{A}'$ は $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ のとき, $*$ 代数にもなっている.

さらに, $\mathcal{A}'' = (\mathcal{A}')'$ は $\mathcal{A}$ の**双可換子代数**(bicommutant) とよばれ, つねに $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$ である.

同様にして, $\mathcal{A}'''$ ($= \mathcal{A}^{(3)}$ と書く), $\mathcal{A}^{(4)}, \mathcal{A}^{(5)}, \cdots$ を定めると, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{(3)} = \mathcal{A}^{(5)} = \cdots$ かつ $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{(4)} = \mathcal{A}^{(6)} = \cdots$ となることが容易にわかる.

〔**定義 2.3**〕 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の $*$ 部分代数 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$ を満たすとき, $\mathcal{A}$ を **von Neumann 代数** (以下 v. N. 代数と略す) という.

v. N. 代数は特殊な C* 代数であり, 純粋に数学的見地からも, また応用上からも非常に重要なものである (〈付章 2.6 項〉以降参照).

代数 $\mathcal{A}$ とその部分集合 $\mathcal{B}$ に対して, $\mathcal{B}$ の左(右)**零化イデアル** (left (right) annihila-

tor）とは，

$$l(\mathcal{B}) \equiv \{A \in \mathcal{A}\ ;\ AB=0,\ \ \forall B \in \mathcal{B}\},$$
$$r(\mathcal{B}) \equiv \{A \in \mathcal{A}\ ;\ BA=0,\ \ \forall B \in \mathcal{B}\},$$

のことである．$l(\mathcal{B})$, $r(\mathcal{B})$ はその名のとおり，それぞれ左イデアル，右イデアルになっている．

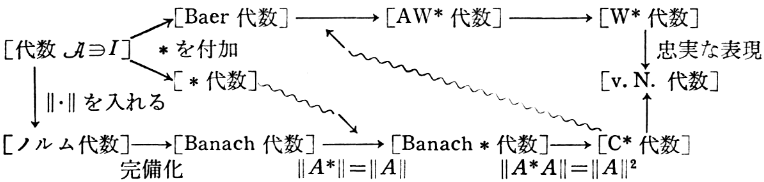
〔**定義 2.4**〕（1） 代数 $\mathcal{A}$ の任意の部分集合 $\mathcal{B}$ に対して，$l(\mathcal{B})$ および $r(\mathcal{B})$ があるベキ等元 E (i. e., $E^2=E$) によって生成される (i. e., $l(\mathcal{B})=\mathcal{A}E, r(\mathcal{B})=E\mathcal{A}$) とき，$\mathcal{A}$を **Baer 代数**という．

（2） Baer 代数である C* 代数を **AW* 代数**という．

（3） ある Banach 空間に共役な C* 代数を **W* 代数**という．

v. N. 代数は Baer 代数であるから，v. N. 代数は AW* 代数でもある．また，W* 代数は忠実に v. N. 代数として表現されることが知られている．

今まで考えてきた様々な代数の相関を表示しておこう．



[a]→[b] の意味は“ a が b を含む”ことである．

2.2 Gelfand-Naimark の表現定理

代数 $\mathcal{A}$ の元 A に関して，$AA^{-1}=A^{-1}A=I$ となる元 $A^{-1}\in\mathcal{A}$ が存在するとき，元 A は**可逆**または**正則**であるといい，A^{-1} を A の**逆元**という．$\mathcal{A}$ の可逆な元の全体を $\mathcal{R}$ で表し，可逆でない元の全体を $\mathcal{S}$ で表す．このとき，次の定理が容易に証明される．

〈**定理 2.1**〉 $\mathcal{A}$ を Banach 代数とするとき；（1） $A\in\mathcal{A}$ が $\|A-I\|<1$ ならば $A\in\mathcal{R}$ かつ $A^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k$（ノルム収束の意味で）；（2） $\mathcal{R}$ は開集合，ゆえに $\mathcal{S}$ 閉集合；（3） 写像 $A\in\mathcal{R}\to A^{-1}\in\mathcal{R}$ は連続．

ところで，$A\in\mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{Re}(A)\equiv\{\lambda\in \boldsymbol{C}\ ;\ \exists(A-\lambda I)^{-1}\in\mathcal{A}\}$ を $\mathcal{A}$ の**リゾルベント集合**，$\lambda\in\mathrm{Re}(A)$ を A の**リゾルベント**といい，$\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Re}(A)^c=\boldsymbol{C}-\mathrm{Re}(A)$ を A の**スペクトル集合**，$\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ を A の**スペクトル**という．

ノルム代数 $\mathcal{A}$ の任意の元 A に対して，$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}$ が存在して，$\inf\{\|A^n\|^{1/n}\ ;\ n\in\boldsymbol{N}\}$ に等しいことが示されるが，これを $r(A)$ とおき，A の**スペクトル半径**という．この $r(A)$ は $\sup\{|\lambda|\ ;\ \lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$ に等しい．さらに $r(A)$ は次の性質を有する．

1°　$0\leqq r(A)\leqq\|A\|$,　$r(\lambda A)=|\lambda|r(A)$,　$\forall\lambda\in \boldsymbol{C}$.

2°　$r(AB)=r(BA)$,　$r(A^n)=r(A)^n$,　$\forall n\in \boldsymbol{N}$.

3°　$AB=BA\Rightarrow r(AB)\leqq r(A)\cdot r(B)$ かつ $r(A+B)\leqq r(A)+r(B)$.

4°　$\mathcal{A}$ が可換ならば $r(\cdot)$ は $\mathcal{A}$ 上の半ノルムである.

5°　$\mathcal{A}$ が C* 代数であるとき,（a）$r(A)\leqq\|A\|$;（b）$\mathcal{A}$が可換 $\Longleftrightarrow r(A)=\|A\|$, $\forall A\in\mathcal{A}\Longleftrightarrow A^*A=AA^*$,　$\forall A\in\mathcal{A}\Longleftrightarrow\|A^2\|=\|A\|^2$,　$\forall A\in\mathcal{A}\Longleftrightarrow r(AB)\leqq r(A)r(B)$,　$\forall A,\ B\in\mathcal{A}$.

〈定理 2.2〉 Banach 代数 $\mathcal{A}$ の元 A, B に対して, A が可逆かつ $r(BA^{-1})<1$ を満たすとき, $A+B$ も可逆であり, $(A+B)^{-1}=A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(BA^{-1})^n$ となる.

〈定理 2.3〉 Banach 代数 $\mathcal{A}$ の任意の元 A に関して,（1）Re(A) は開集合, ゆえに Sp(A) は閉集合.（2）$\lambda,\mu\in$Re(A) に対して, $A(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$ とおくと, $A(\lambda)-A(\mu)=(\mu-\lambda)A(\lambda)A(\mu)$.（3）$A(\lambda)$ は $\mathcal{A}$ に値をとる解析函数である.

〈定理 2.4〉 Gelfand-Mazur の定理： Banach 代数 $\mathcal{A}$ の零元を除くすべての元が可逆であれば, $\mathcal{A}=\boldsymbol{C}I$ である.

略証　函数論の Liouville の定理より, Sp$(A)\neq\emptyset$ が示せる. したがって任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して, $\lambda\in$Sp(A) が存在して, $\lambda I-A$ は可逆ではない. ゆえに定理の条件より $\lambda I-A=0$. よって $\mathcal{A}=\boldsymbol{C}I$. ▌

Banach 代数 $\mathcal{A}$ の両側イデアル $\mathcal{J}$(以下,(両側,左,右) イデアルといえば $\{0\}\subsetneqq\mathcal{J}\subsetneqq\mathcal{A}$) において, $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ の元を $[A]=\{A+Q\,;\,Q\in\mathcal{J}\}=A+\mathcal{J}$ で表し, $[A]$ のノルムを $\|[A]\|=\inf\{\|B\|\,;\,B\in[A]\}$ で定めると,

6°　$\mathcal{A}/\mathcal{J}$ も Banach 代数

になることがわかる. さらに, $\mathcal{A}$ が＊代数でもあるとき, $\mathcal{J}^*=\mathcal{J}$ であれば $[A]^*=[A^*]$ と $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ における対合＊を定めると, $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ も＊代数になる. イデアル（右, 左, 両側どれでも）$\mathcal{J}$ が極大であるとは, $\mathcal{J}\subsetneqq\mathcal{J}'\subsetneqq\mathcal{A}$ なるイデアル $\mathcal{J}'$ が存在しないことであるが, 代数 $\mathcal{A}$ のイデアル $\mathcal{J}$ に関して $\mathcal{J}$ を含む $\mathcal{A}$ の極大イデアルが Zorn の補題により常に存在する. したがって,

7°　Banach 代数 $\mathcal{A}$ のイデアル $\mathcal{J}$ に関して,（i）$\mathcal{J}$ の閉包 $\overline{\mathcal{J}}$ は $\mathcal{A}$ のイデアルである.（ii）$\mathcal{J}$ が極大であれば $\overline{\mathcal{J}}=\mathcal{J}$.

8°　$\mathcal{A}$ が可換代数で $\mathcal{J}$ が $\mathcal{A}$ のイデアル（可換のときは, 右・左の区別なし）であるとき, $\mathcal{J}$ が極大 $\Longleftrightarrow\mathcal{A}/\mathcal{J}$ が体.

9°　$\mathcal{A}$ が可換 Banach 代数で, $\mathcal{J}$ が $\mathcal{A}$ の極大イデアルならば, $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ は $\boldsymbol{C}$ と同型である.（$\mathcal{A}/\mathcal{J}=\boldsymbol{C}I$ と書く）

ところで, 可換代数 $\mathcal{A}$ から $\boldsymbol{C}$ への恒等的に 0 でない準同型写像 χ を $\mathcal{A}$ の**指標**

(character) という．とくに $\mathcal{A}$ が可換 Banach 代数，$\mathcal{I}$ が $\mathcal{A}$ の極大イデアルであれば，結果 9° より $\mathcal{A}/\mathcal{I}=\boldsymbol{C}I$ であるから，$\mathcal{A}$ から $\boldsymbol{C}$ への準同型写像でその核が $\mathcal{I}$ となるものを χ とすると，χ は指標となり，$\mathcal{I}=K_\chi\equiv\{A\in\mathcal{A}\,;\,\chi(A)=0\}$．このことから，指標の集合と極大イデアルの集合の各々の元の間には，1 対 1 の対応がつくことがわかる．さらに，$A\in\mathcal{A}$ に対して，

10° $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\Longleftrightarrow$ 指標 χ が存在して $\chi(A)=\lambda$.

11° $|\chi(A)|\leqq r(A)\leqq\|A\|$.

が満たされる．これらの結果から，可換 Banach 代数 $\mathcal{A}$ の指標の全体を**スペクトル空間**（**指標空間，極大イデアル空間**）とよび，$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ で表す．

任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ から $\boldsymbol{C}$ への写像 $\hat{A}$ を $\hat{A}(\chi)=\chi(A)$ で定める．ここで，A に $\hat{A}$ を対応させる写像 $\wedge : A\to\hat{A}$ を **Gelfand 表現**という．

〈定理 2.5〉 可換 Banach 代数 $\mathcal{A}$ において；（1） $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$は $\mathcal{A}^*$ の単位球 $\mathcal{A}^*{}_1$ に含まれる弱＊閉集合である；したがって $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は弱＊コンパクト Hausdorff 空間；（2） $\mathrm{ran}\,\hat{A}=\mathrm{Sp}(A)$；（3） $\hat{\mathcal{A}}$ は $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ の元を分離する；（4） $\wedge : A\to C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ ($\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ 上の連続函数の全体) は準同型写像で，$\|\hat{A}\|\equiv\sup\{|\hat{A}(\chi)|\,;\,\chi\in\mathrm{Sp}(\mathcal{A})\}\leqq\|A\|$.（5） $\mathcal{A}$ が 1 つの元 $A\in\mathcal{A}$ によって生成されている $\left(\text{i. e., } \mathcal{A}=\left\{\sum_{j=0}^{n}\alpha_j A^j\,;\,\alpha_j\in\boldsymbol{C}\right\}^{-}\right)$ とき，$\hat{A} : \mathrm{Sp}(\mathcal{A})\to\mathrm{Sp}(A)\subset\boldsymbol{C}$ は位相同型写像である．

〈定理 2.6〉 $\mathcal{A}$ が可換 C* 代数 $\Longleftrightarrow\wedge : \mathcal{A}\to C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ は＊等距離同型写像.

略証 $\mathcal{A}$ が可換だから，任意の $A\in\mathcal{A}$ は正規．ゆえに $\|\hat{A}\|=r(A)=\|A\|$ となるから，$\wedge$は〈定理 2.5〉の（4）より等距離写像．さらに，任意の $A\in\mathcal{A}$，$\chi\in\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ に対して，$\widehat{A^*}(\chi)=\hat{A}^*(\chi)$ が示せる．1 対 1 ＊準同型写像 $\wedge$ が $\mathcal{A}$ から $C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ の上への写像であることを示せばよいが，これは，$\hat{\mathcal{A}}=\{\hat{A}\,;\,A\in\mathcal{A}\}\subset C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ は C* 部分代数で，〈定理 2.5〉の（3）より $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ の元を分離するから，Stone-Weierstrass の定理より，$\hat{\mathcal{A}}=C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$．▌

〈系 2.7〉 可換な C* 代数 $\mathcal{A}_0$ が $\mathcal{A}_0\not\ni\iota$ であるとき，（1） $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0)$ は弱＊局所コンパクト Hausdorff 空間で，（2） $\mathcal{A}_0$ は $C_0(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0))$ と＊等距離同型である．

略証 次節の〈定理 2.8〉より I を含む C* 代数 $\mathcal{A}$ を作れる (i. e., $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\boldsymbol{C}I$)．前定理より $\hat{\mathcal{A}}=C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$．$\chi_0(A)=0$，$\forall A\in\mathcal{A}_0$ なる χ_0 をとると $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0)=\mathrm{Sp}(\mathcal{A})\setminus\{\chi_0\}$．これより $\hat{\mathcal{A}}_0=C_0(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0))$．▌

2.3 C* 代数の要素

〈定理 2.8〉 I を含まない C* 代数 $\mathcal{A}_0$ に対して，$\mathcal{A}=\{A+\lambda I\,;\,A\in\mathcal{A}_0,\ \lambda\in\boldsymbol{C}\}$ とおき，ノルム $\|\cdot\|$ を $\|A+\lambda I\|=\sup\{\|AB+\lambda B\|\,;\,B\in\mathcal{A}_0,\ \|B\|\leqq 1\}$ で定め，対合＊を $(A+\lambda I)^*=A^*+\bar{\lambda}I$ と定めると，$\mathcal{A}$ は I を含む C* 代数となる．これを $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\boldsymbol{C}I$

と書く.

この定理よりわれわれの立場，すなわち，I を含む C* 代数を考察の対象にしていることが自然なものであるとわかるであろう.

単位元 I を含まない C* 代数でも以下のような近似単位元をつねに含んでいる. C* 代数 $\mathcal{A}$ における**近似単位元**とは，ネット $\{E_\alpha\}\subset\mathcal{A}$ で，次の条件を満たすものをいう：(i)　$E_\alpha\leqq E_\beta$ $(\alpha\leqq\beta)$，(ii)　$\|E_\alpha\|\leqq 1$，(iii)　$\lim_\alpha\|E_\alpha A-A\|=0$ かつ，$\lim_\alpha\|AE_\alpha-A\|=0$.

なお，$\mathcal{A}$ が可分であるときは，この近似単位元は点列でとれる.

以下，A, B, C を C* 代数 $\mathcal{A}$ の元とする. このとき，これらの元のスペクトルに関して次のことが証明される.

1°　$\mathrm{Sp}(AB)\cup\{0\}=\mathrm{Sp}(BA)\cup\{0\}$.

2°　$\mathrm{Sp}(A^*)=\overline{\mathrm{Sp}(A)}\equiv\{\bar{\lambda}\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$.

3°　$A\in\mathcal{R}$ ならば $\mathrm{Sp}(A^{-1})=\mathrm{Sp}(A)^{-1}\equiv\{\lambda^{-1}\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$.

4°　A がユニタリーならば $|\lambda|=1$ $(\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(A))$.

5°　$A=A^*$ ならば $\mathrm{Sp}(A)\subset[-\|A\|, \|A\|]$.

6°　任意の多項式 f に対して，$\mathrm{Sp}(f(A))=f(\mathrm{Sp}(A))$.

7°　A が正規で f が連続ならば $\mathrm{Sp}(f(A))=f(\mathrm{Sp}(A))$.

C* 部分代数 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ が $I\in\mathcal{B}$ であるとき，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{Re}^{\mathcal{B}}(A)\equiv\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,\exists(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{B}\}$, $\mathrm{Sp}^{\mathcal{B}}(A)\equiv\boldsymbol{C}-\mathrm{Re}^{\mathcal{B}}(A)$ とおく. とくに，$A\in\mathcal{B}$ のときこれらはそれぞれ $\mathrm{Re}(A)$, $\mathrm{Sp}(A)$ に等しいことが証明できる.

C* 代数 $\mathcal{A}$ の元 $\{A_i\}$ によって生成される C* 部分代数を $[\![\{A_i\}]\!]$ と書く. $A\in\mathcal{A}$ を正規な元として，$\mathcal{A}_0=[\![I, A]\!]$ とおくと，これは可換な C* 代数であるから，Gelfand-Naĭmark の表現定理より，$\mathcal{A}_0$ と $C(\Omega)$ (Ω はスペクトル空間 $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0)$) は等距離 * 同型である. さらに $\chi\in\Omega\longmapsto\chi(A)\in\mathrm{Sp}(A)$ は位相同型写像であるから $\mathcal{A}_0$ と $C(\mathrm{Sp}(A))$ は同一視することができる. 今 $f_0\in C(\mathrm{Sp}(A))$ を $f_0(\lambda)=\lambda$ とすると，この連続函数 f_0 は A と同一視することができ，この同一視を作用素の**函数表示**という.

この函数表示を使い以下の結果 19°～22° が示される. これらの結果を記述する前に 2，3 の記号を導入しておこう.

C* 代数 $\mathcal{A}$ の元 A が正 ($A\geqq 0$ と書く) であることを，$A^*=A$ かつ $\mathrm{Sp}(A)\subset\boldsymbol{R}^+=[0,\infty)$ で定義し，$\mathcal{A}$ の中の正の元の集りを $\mathcal{A}_+$ で表す. また，$\mathcal{A}_{\mathrm{s.a}}$ を $\mathcal{A}$ の自己共役な元の集りとすると，定義より $\mathcal{A}_{\mathrm{s.a}}\supset\mathcal{A}_+$.

8°　$\mathcal{A}_+$ は凸錐であり，$\mathcal{A}_+\cap(-\mathcal{A}_+)=\{0\}$.

9°　$A\in\mathcal{A}_+$ に対して，$B\in\mathcal{A}_+$ が一意に存在して，$A=B^2$.

10°　$A\in\mathcal{A}_{\mathrm{s.a}}$ に対して，$B, C\in\mathcal{A}_+$ が一意に存在して，$A=B-C$，$BC=0$ と表される. ここで B, C は $\mathcal{A}_0=[\![A, I]\!]$ の元である.

11°　$A\in\mathcal{A}_+\Longleftrightarrow$ ある $B\in\mathcal{A}$ に対して $A=B^*B$.

たとえば 10° は次のようにして証明される．いま，$A\in\mathcal{A}_{s.a}$ に対して，$f_1, f_2\in C(\mathrm{Sp}(A))$ を $f_1(\lambda)=\sup\{\lambda, 0\}$ ($=0\vee\lambda$ と書くこともある)，$f_2(\lambda)=\sup\{-\lambda, 0\}$ と定めると，$\lambda=f_1(\lambda)-f_2(\lambda)$ かつ $f_1(\lambda)f_2(\lambda)=0$ である．したがって f_1, f_2 に対応する作用素を $B, C\in[\![A, I]\!]$ とすればよい．

2つの元 $A, B\in\mathcal{A}_{s.a}$ の大小関係を $A\geqq B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A-B\in\mathcal{A}_+$ で定めると，"$\geqq$" は当然，順序関係である．

任意の元 $A, B, C\in\mathcal{A}$ に対して，

12° $A\geqq B\geqq 0\Rightarrow\|A\|\geqq\|B\|$. $A\geqq 0 \Rightarrow A\|A\|\geqq A^2$.

13° $A\geqq B\geqq 0\Rightarrow C^*AC\geqq C^*BC\geqq 0$.

14° $A\geqq B\geqq 0$, $\lambda>0\Rightarrow(B+\lambda I)^{-1}\geqq(A+\lambda I)^{-1}$.

15° $A\in\mathcal{A}_+\Longleftrightarrow\|\|A\|I-A\|\leqq\|A\|$ かつ $A\in\mathcal{A}_{s.a}$.

16° $A\in\mathcal{A}_{s.a}$, $\|A\|\leqq 1$, $\|I-A\|\leqq 1\Rightarrow A\in\mathcal{A}_+$.

17° $A, B\in\mathcal{A}_+$, $A\geqq B\Rightarrow A^t\geqq B^t$, $\forall t\in[0, 1]$.

18° $A, B\in\mathcal{A}_+$, $A\geqq B$ ならばつねに $A^2\geqq B^2\Longleftrightarrow\mathcal{A}$ が可換.

が容易に証明される．

C* 代数 $\mathcal{A}$ の元 A は2つの自己共役な元の和として表せるが，また，$\mathcal{A}\ni I$ の場合，A は4つのユニタリー作用素の和として表現することができる．実際，$A=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}i^{k-1}\|A_k\|(U_k+U_k^*)$. ここで $A_1=\frac{1}{2}(A+A^*)$，$A_2=\frac{1}{2i}(A-A^*)$，$U_k=A_k/\|A_k\|+i(I-A_k^2/\|A_k\|^2)^{1/2}$.

この節の最後に C* 代数 $\mathcal{A}$ の単位球 $\mathcal{A}_1$ (i. e., $\mathcal{A}_1\equiv\{A\in\mathcal{A}\,;\,\|A\|\leqq 1\}$) の端点 (すなわち，$\mathcal{A}_1$ の異なる2個以上の点の凸結合で表せない点) についていくつかの結果を記しておこう．

19° $I\in\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_1$ の端点である．実際 $\mathcal{A}_1$ が端点をもつ$\Longleftrightarrow I\in\mathcal{A}$.

20° A が $\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_+$ の端点$\Longleftrightarrow A^2=A$.

21° $A\in\mathcal{A}_1$ が端点$\Longleftrightarrow(I-A^*A)\mathcal{A}(I-A^*A)=\{0\}$.

2.4 C* 代数の表現と状態

2つの C* 代数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 間の＊準同型写像$\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に関して，

〈**定理 2.9**〉 任意の元 $A\in\mathcal{A}$ に対して；(1) $A\geqq 0\Rightarrow\pi(A)\geqq 0$；(2) $\|\pi(A)\|\leqq\|A\|$；(3) πが忠実$\Longleftrightarrow\|\pi(A)\|=\|A\|$.

この定理の (3) より C* 代数 $\mathcal{A}$ のノルム $\|\cdot\|$ は一意に決まることがわかる．実際，$\mathcal{A}$が2つのノルム$\|\cdot\|_1$と$\|\cdot\|_2$をもったとする．このとき，写像$\pi:\{\mathcal{A}, \|\cdot\|_1\}\to\{\mathcal{A}, \|\cdot\|_2\}$ を $\pi(A)=A$ ($\forall A\in\mathcal{A}$) で定めると，この π は＊同型写像であるから，(3)より $\|A\|_1=\|\pi(A)\|_2=\|A\|_2$ となる．

C* 代数 $\mathcal{A}$ の表現 $\{\mathcal{H},\pi\}$ に対して，$\pi(\mathcal{A})\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$ を満たす $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{L}$ を $\mathcal{H}$ の**不変部分空間**とよぶ．$\mathcal{L}$ が不変部分空間であるとき，$\mathcal{L}^{\perp}\equiv\{x\in\mathcal{H}\,;\,\langle x,y\rangle=0,\,y\in\mathcal{L}\}$ も $\mathcal{H}$ の不変部分空間となる．$\mathcal{L}$ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とし，E を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への射影作用素とすると，$\mathcal{L}$ が $\mathcal{H}$ の不変部分空間であることと，$E\in\pi(\mathcal{A})'$ であることとは同値である．さらに，$\mathcal{H}_1\equiv\{\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}\}^-$，$\mathcal{H}_2\equiv\{x\in\mathcal{H}\,;\,\pi(A)x=0,\ A\in\mathcal{A}\}$ と $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ を定めると，$\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ となり，$\pi(I)$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_1$ への射影作用素になる．

〔**定義 2.5**〕（1） $\{\mathcal{H},\pi\}$ が**非縮退**（**non-degenerate**）**表現** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{H}_2=\{0\}$.
（2） $\{\mathcal{H},\pi\}$ が**巡回**（**cyclic**）**表現** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある $x\in\mathcal{H}$ が存在して，$\{\pi(\mathcal{A})x\}^-=\mathcal{H}$.
（2）におけるベクトル x を $\pi(\mathcal{A})$ に関する**巡回ベクトル**という．

あるベクトル $y\in\mathcal{H}$ において，$\pi(A)y=0$ ならばつねに $\pi(A)=0$ となるとき，この y は $\pi(\mathcal{A})$ に関する**分離ベクトル**であるという．$\pi(I)=I$ であるとき，$x\in\mathcal{H}$ が $\pi(\mathcal{A})$ に関して巡回ベクトルであることと，x が $\pi(\mathcal{A})'$ に関して分離ベクトルであることとは同値であることが容易に示せる．また巡回表現は，つねに非縮退表現である．

次の定理は重要である．

〈**定理 2.10**〉 C* 代数 $\mathcal{A}$ の非縮退表現 $\{\mathcal{H},\pi\}$ は巡回部分表現の直和で表せる．（すなわち，$\mathcal{H}=\oplus_j\mathcal{H}_j$，$\mathcal{H}_j=\{\pi(\mathcal{A})x_j\}^-$ で $\mathcal{H}_j\perp\mathcal{H}_k$ $(k\neq j)$．さらに $E_j\,;\,\mathcal{H}\to\mathcal{H}_j$（射影作用素）に対して，$\pi_j(A)=\pi(A)E_j$ とおくと $\pi=\otimes_j\pi_j$ と書け，$\{\mathcal{H}_j,\pi_j\}$ は $\{\mathcal{H},\pi\}$ の巡回部分表現となる．）

略証 $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$ を任意の $x,y\in\mathcal{L}$ に対して $\{\pi(\mathcal{A})x\}^-\perp\{\pi(\mathcal{A})y\}^-$ が満たされるものとする．このような $\mathcal{L}$ の集合族を $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2\in\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{L}_1\subset\mathcal{L}_2$ で順序を入れると $\mathcal{F}$ は帰納的順序集合になる．よって Zorn の補題により，$\mathcal{F}$ には極大元 $\mathcal{L}\equiv\{x_j;\,j\in J\}$ が存在する．ここで $\mathcal{H}_j=\{\pi(\mathcal{A})x_j\}^-$ ととれば $\mathcal{H}_j$ は $\mathcal{H}$ の不変部分空間で $\mathcal{H}=\oplus_{j\in J}\mathcal{H}_j$. ▌

さて，表現 $\{\mathcal{H},\pi\}$ に対して，$\mathcal{H}$ の不変閉部分空間が $\{0\}$ または $\mathcal{H}$ だけのとき，$\{\mathcal{H},\pi\}$ は**既約**であるという．

〈**定理 2.11**〉 次の 3 つは同値である．（1） $\{\mathcal{A},\pi\}$ は既約．（2） $E\in\pi(\mathcal{A})'$ が射影作用素ならば $E=0$ または I.（3） $\pi(\mathcal{A})'=CI$.（4） $\mathcal{H}$ の任意のベクトル $x(\neq0)$ が巡回的．または，$\pi(\mathcal{A})=\{0\}$ かつ $\mathcal{H}=\mathbf{C}$.

C* 代数 $\mathcal{A}$ から C への線形汎函数 φ が任意の $A\in\mathcal{A}_+$ に対して，$\varphi(A)\geqq0$ であるとき，φ は**正**であるといわれる．また，$\varphi(A^*A)=0$ ならば $A=0$ となるとき，φ は**忠実**であるという．**正の線形汎函数**（または，**正値線形汎函数**）φ は **Schwarz の不等式** $|\varphi(A^*B)|^2\leqq\varphi(A^*A)\varphi(B^*B)$ $(\forall A,B\in\mathcal{A})$ を満たし，ここで $B=I$ ととると $|\varphi(A)|^2$

$\leqq\varphi(A^*A)\varphi(I)\leqq\|A\|^2\varphi(I)^2$ となり，したがって φ は連続となる．さらに $\varphi(I)=\|\varphi\|\equiv\sup\{|\varphi(A)|\,;\,A\in\mathcal{A},\ \|A\|\leqq 1\}$ となる．逆に φ が**連続線形汎函数**で，$\|A\|\leqq 1$ である $A\in\mathcal{A}_+$ が存在して $\varphi(A)=\|\varphi\|$ であるとき，φ は正になることが示される．$\mathcal{A}$ 上の連続線形汎函数の全体を $\mathcal{A}^*$ で表し，その中で正なものを $\mathcal{A}^*_+$ で表すことにする．この $\mathcal{A}^*$ は上記の φ のノルム $\|\cdot\|$ に関して Banach 空間になっている．

$\|\varphi\|=1$ となる $\varphi\in\mathcal{A}^*_+$ を $\mathcal{A}$ 上の**状態**とよぶ．これは確率測度の非可換系への拡張と見なしうるもので，量子系の力学を画くために重要な概念である．状態の集合を $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$（これを $\mathcal{A}$ の状態空間ということもある．以下 $\mathcal{A}$ を略して $\mathfrak{S}$）で表す．

$\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{A}^*_+$ に対して，$\varphi_1-\varphi_2\in\mathcal{A}^*_+$ のとき，φ_1 は φ_2 を**押える**(dominate, majorize) といい，$\varphi_1\geqq\varphi_2$ と書く．$\varphi\in\mathfrak{S}$ において，どのように $\lambda\in\boldsymbol{R}^+$ を選んでも，$\lambda\varphi\geqq\psi$（または，$\varphi\geqq\lambda\psi$）となる $\psi(\neq\varphi)\in\mathfrak{S}$ が存在しないとき，φ は**純粋**（pure）であるといい，純粋状態の全体を $\mathfrak{S}_p$ で表す．

$\mathcal{A}^*$ に通常導入される位相には次の 2 つのものがある．$\varphi\in\mathcal{A}^*$ の ε-近傍を $N_\varepsilon(\varphi)$ と書くと，（1） **一様位相** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} N_\varepsilon(\varphi)\equiv\{\varphi\in\mathcal{A}^*\,;\,\|\varphi-\psi\|<\varepsilon\}$；（2） **弱＊位相**（$\sigma(\mathcal{A}^*,\mathcal{A})$-位相）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} N_\varepsilon(\varphi)\equiv\{\psi\in\mathcal{A}^*\,;\,|\varphi(A_k)-\psi(A_k)|<\varepsilon,\ A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{A}\}$．

$\mathcal{A}\ni I$ の場合は，$\mathfrak{S}$ が $\mathcal{A}^*$ の単位球 $\mathcal{A}^*_1$ の凸かつ弱＊閉の部分集合になるから $\mathfrak{S}$ は弱＊コンパクトである（実際，$\mathcal{A}\ni I\Longleftrightarrow\mathfrak{S}$ 弱＊コンパクト．よって，$\mathcal{A}\not\ni I$ の場合は，$\mathfrak{S}$ はコンパクトにはならない!）．さらに，$\mathcal{A}\ni I$ のときは，$\mathfrak{S}_p$ は $\mathfrak{S}$ の端点の全体 $\mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$ に一致することがわかり，よって，Krein-Milman の定理により，$\mathfrak{S}={}^{w*}\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$（すなわち，$\mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$ の凸包の弱＊位相による閉包）となる．$\mathcal{A}\not\ni I$ でも $\mathcal{A}^*_1$ は弱＊コンパクトであり，$\mathrm{ex}\,\mathcal{A}^*_1=\mathfrak{S}_p\cup\{0\}$．なお，$\mathcal{A}\not\ni I$ のとき $\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}+\boldsymbol{C}I$ とおくと，$\omega\in\mathcal{A}$ に対して，$\tilde{\omega}\in\tilde{\mathcal{A}}^*$ が存在して，$\tilde{\omega}(\lambda I+A)=\lambda\|\omega\|+\omega(A)$ および $\widetilde{\omega_1+\omega_2}=\tilde{\omega}_1+\tilde{\omega}_2$ が成り立つ．

2.5 GNS 構成定理

C* 代数およびその上の状態で画かれる系の力学的変化（時間変化など）を論ずるために，ある群 G（$G=\boldsymbol{R}$ など）上の作用 α を考える必要がある．ここでは，この作用として G から $\mathcal{A}$ の＊自己同型写像の全体（$\mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$ と書く）への写像で次の条件を満たすものを考える．（i） $\alpha_{g_1}\circ\alpha_{g_2}=\alpha_{g_1\circ g_2}$ $(\forall g_1,g_2\in G)$．（ii） $\lim_{``g\to e"}\|\alpha_g(A)-A\|=0$ $(\forall A\in\mathcal{H})$．（ii）において，“$g\to e$”は G の演算 $\circ$ に関する単位元“e”への極限を意味している．こうして $\alpha(G)\equiv\{\alpha_g\,;\,g\in G\}$ は**強連続**（（ii）の意味で）な**一径数群**になる．

こうして非可換力学系は 3 つ組（$\mathcal{A},\mathfrak{S},\alpha(G)$）で記述することができる．この記述は直接 Hilbert 空間を使わない一般的なものであるが，Hilbert 空間を使って行う通常の議論を含んでいることが望ましい．これを保証するのが次の Gelfand-Naĭmark-Segal の定理である．

〈定理 2.12〉 **GNS 構成定理**（または巡回表現定理）：C* 代数 $\mathscr{A}$ 上の任意の状態 φ に対して，次のものがユニタリー同値性を除いて一意に存在する：（1） $\mathscr{H}_\varphi$ (GNS Hilbert 空間)；（2） π_φ (GNS 表現)；（3） x_φ (GNS 巡回ベクトル)$\in\mathscr{H}_\varphi$ で $\varphi(A)=\langle x_\varphi, \pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$ を満たす．

略証 $\mathscr{K}_\varphi=\{A\in\mathscr{A}\,;\,\varphi(A^*A)=0\}$ とおき，商空間 $\mathscr{A}_\varphi\equiv\mathscr{A}/\mathscr{K}_\varphi$ における $A\in\mathscr{A}$ の同値類を $x(A)$ とかき，$\langle x(A),\ x(B)\rangle=\varphi(A^*B)$ とすると，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathscr{A}_\varphi$ の内積になる．この内積によって $\mathscr{A}_\varphi$ を完備化したものが $\mathscr{H}_\varphi$ である．また，$\pi_\varphi(A)x(B)=x(AB)$ と $\pi_\varphi(A)$ を定めるとこれは $\mathscr{A}$ から $\boldsymbol{B}(\mathscr{H}_\varphi)$ への表現になる．（3）の x_φ は $x_\varphi=x(I)$ によって求められる．こうしてつくった3つ組 $\{\mathscr{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ はユニタリー同値性を除いて一意である．▌

なお，$\varphi\circ\alpha_g=\varphi$ (i.e.,$\varphi(\alpha_g(A))=\varphi(A)$ $(\forall A\in\mathscr{A},\ \forall g\in G)$) であるとき φ は **α-不変**であるという．α-不変な状態の集合を $I(\alpha)$ で表す．

〈定理 2.13〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ が α-不変であるとき，強連続な一径数ユニタリー群 $\{u_g{}^\varphi\,;\,g\in G\}$ が存在して，（1） $u_g{}^\varphi x_\varphi=x_\varphi$，（2） $\pi_\varphi(\alpha_g(A))=u_g{}^\varphi\pi_\varphi(A)u_g{}^{\varphi*}$，$\forall A\in\mathscr{A}$ を満たす．

GNS表現 $\{\mathscr{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ に関する次の定理は重要である．

〈定理 2.14〉 $\varphi, \psi\in\mathfrak{S}$ に対して次は同値である．（1） $\lambda>0$ が存在して $\psi\leqq\lambda\varphi$．（2） $T\in\boldsymbol{C}I$ である $T\in\pi_\varphi(\mathscr{A})'_+$ が一意に存在して $\|T\|\leqq\lambda$ かつ $\psi(A)=\langle x_\varphi, T\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$，$\forall A\in\mathscr{A}$.

略証 （2）⇒（1）は自明．（1）⇒（2）を示す．Schwarz の不等式より $|\psi(A^*B)|^2\leqq\lambda\|\pi_\varphi(A)\|^2\|\pi_\varphi(B)\|^2$. ゆえに，写像 $(\pi_\varphi(A)x_\varphi,\ \pi_\varphi(B)x_\varphi)\to\psi(A^*B)$ は $\pi_\varphi(\mathscr{A})x_\varphi\times\pi_\varphi(\mathscr{A})x_\varphi$ 上の正の二次形式であり，この写像は $\mathscr{H}_\varphi\times\mathscr{H}_\varphi\to\boldsymbol{C}$ へ一意に拡張できる．よって Riesz の定理より $T\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H}_\varphi)$ が存在して $\psi(A^*B)=\langle\pi_\varphi(A)x_\varphi,\ T\pi_\varphi(B)x_\varphi\rangle$ かつ $\|T\|\leqq\lambda$. これが求める T で $T\in\pi_\varphi(\mathscr{A})'_+$ となる．▌

この定理を使うと次の系が証明される．

〈系 2.15〉 （1） $\varphi\in\mathfrak{S}_p\Longleftrightarrow\{\mathscr{H}_\varphi, \pi_\varphi\}$ が既約．（2） $\mathscr{A}$が可換なとき，$\varphi\in\mathfrak{S}_p\Longleftrightarrow\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$，$\forall A, B\in\mathscr{A}$.

$\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の自己共役部分代数が一様位相に関して閉じているとき，この代数を**作用素 C* 代数**または**具体的な C* 代数**というが，これに関して，

〈定理 2.16〉 **Gelfand-Naǐmark の定理**：一般の C* 代数はある Hilbert 空間上の作用素 C* 代数に忠実に表現される．

註　従来は，一般の C* 代数を B* 代数とよび，作用素 C* 代数を単に C* 代数とよんでいた．上記の定理は 1940 年 Gelfand と Naĭmark がある条件の下で証明したもので，その後多くの研究者によって条件が弱められ 1952 年 Fukamiya [F 1] も改良した条件の下で証明した．この Fukamiya の証明が本質的に条件なしに B* 代数＝C* 代数（上記の定理）の証明に適用されることが，Kaplansky スクールの研究者によって示されたのである．

2.6　$\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ 上の位相

$\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の局所位相として次の 7 種のものが重要である．$\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ のネット $\{A_\alpha\}$ が $A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ に収束するものとして位相 τ（すなわち，$\alpha\to$“∞” のとき $A_\alpha\xrightarrow{\tau}A$）を導入する．

（1）　**一様**（またはノルム）**位相**（τ^u で表す）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\|A_\alpha-A\|\to 0$．（これは $A_\alpha\xrightarrow{u}A$ と書く．）

（2）　**強**（作用素）**位相**（τ^s）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\|(A_\alpha-A)x\|\to 0,\quad \forall x\in\mathscr{H}$．（$A_\alpha\xrightarrow{s}A$ と書く．）

（3）　**弱**（作用素）**位相**（τ^w）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}|\langle x,(A_\alpha-A)y\rangle|\to 0,\ \forall x, y\in\mathscr{H}$．（$A_\alpha\xrightarrow{w}A$ と書く．）

（4）　**超強**（作用素）**位相**（$\tau^{u.s}$）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\sum_n\|x_n\|^2<\infty$ なる任意の点列 $\{x_n\}\subset\mathscr{H}$ に対して $\sum_n\|(A_\alpha-A)x_n\|^2\to 0$．（$A_\alpha\xrightarrow{u.s}A$ と書く．）

（5）　**超弱**（作用素）**位相**（$\tau^{u.w}$）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\sum_n\|x_n\|^2<\infty,\ \sum_n\|y_n\|^2<\infty$ なる任意の $\{x_n\}$，$\{y_n\}\subset\mathscr{H}$ に対して $|\sum_n\langle x_n,(A_\alpha-A)y_n\rangle|\to 0$．（$A_\alpha\xrightarrow{u.w}A$ と書く．）

（6）　**強＊**（作用素）**位相**（τ^{s*}）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\|(A_\alpha-A)x\|^2+\|(A_\alpha{}^*-A^*)x\|^2\to 0$．（$A_\alpha\xrightarrow{s*}A$ と書く．）

（7）　**超強＊**（作用素）**位相**（τ^{us*}）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\sum_n\|x_n\|^2<\infty$ なる任意の $\{x_n\}\subset\mathscr{H}$ に対して $\sum_n\{\|(A_\alpha-A)x_n\|^2+\|(A_\alpha{}^*-A^*)x_n\|^2\}\to 0$．（$A_\alpha\xrightarrow{us*}A$ と書く．）

上記の超位相は **$\boldsymbol{\sigma}$ 位相**ともいわれる．たとえば，超強位相＝σ 強位相．

以下，ある集合 $\mathscr{B}\subset\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の τ による閉包を $\overline{\mathscr{B}}^\tau$ で表し，$\mathscr{B}$ が τ に関して閉じているときは τ-閉であるという．

各位相の強弱関係（強位相$\succ$弱位相）は次のようになっている．

$$\begin{array}{ccccccc}\tau^{u.w} & \prec & \tau^{us} & \prec & \tau^{u.s*} & \prec & \tau^u\\ \curlyvee & & \curlyvee & & \curlyvee & & \\ \tau^w & \prec & \tau^s & \prec & \tau^{s*} & & \end{array}$$

ただし，$\dim\mathscr{H}<+\infty$ のとき，上の 7 つの位相はすべて一致する．

$\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の一様有界な部分集合を以下 $\mathscr{B}$ と書く．（たとえば，単位球 $\mathscr{B}_1\equiv\{A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H});\ \|A\|\leqq 1\}$）この $\mathscr{B}$ 上では，$\tau^{u.w}=\tau^w$，$\tau^{u.s}=\tau^s$，$\tau^{us*}=\tau^{s*}$ である．

今 $A_\alpha\to A$，$B_\alpha\to B$ がある位相 τ に関して成立しているとし，このとき （a） $A_\alpha{}^*$

$\xrightarrow{\tau} A^*$,（b） $A_\alpha Q \xrightarrow{\tau} AQ$ かつ $QA_\alpha \xrightarrow{\tau} QA$, $\forall Q \in \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$, （c） $A_\alpha B_\alpha \xrightarrow{\tau} AB$,（d） $\{A_\alpha\}, \{B_\alpha\} \subset \mathscr{B}$ のとき $A_\alpha B_\alpha \xrightarrow{\tau} AB$, が成立するかどうかを考えてみよう．成立する場合を○印，不成立な場合を×印で表すと次のようになる．

τ	(a)	(b)	(c)	(d)
τ^u	○	○	○	○
τ^s	×	○	×	○
τ^w	○	○	×	×
τ^{us}	×	○	×	○
τ^{uw}	○	○	×	×
τ^{s*}	○	○	×	○
τ^{us*}	○	○	×	○

$\tau^{u.s}$ 位相に関する次の結果は有用である．

〈定理 2.17〉（1） 自己共役作用素の増大ネット $\{A_\alpha\} \subset \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ がある $B \in \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ に対して $A_\alpha \leqq B$ であるとき，$A = \sup A_\alpha$ が存在して $A_\alpha \xrightarrow{u.s} A$ となる．（2） $0 \leqq A \leqq I$ なる $A \in \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ において，E を $\mathscr{H}$ から $\overline{\operatorname{ran} A}$ への射影作用素とするとき，この E は $0 \leqq A \leqq E$, $AE = EA = A$ を満たす最小の射影であり，定数項をもたない A の多項式の列で近似できる（E を **A の台**といい，$\mathrm{s}(A)$ で表す）．（3） $\mathscr{A} \subset \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ が $\tau^{u.s}$ 閉な＊代数のとき，$\mathscr{A}$ に含まれる射影作用素の全体を $\mathscr{P}$ とするとき，$\mathscr{A}$ は $\mathscr{P}$ の元の $\boldsymbol{C}$ 上での線形結合全体の τ^u 閉包に等しい．

2.7 線形汎関数と稠密定理

集合 $\mathfrak{R} \subset \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ を恒等作用素を含む $\tau^{u.s}$-閉な $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の＊部分代数とする．$\mathfrak{R}$ 上の線形汎函数 φ が **τ-連続**であるとは，$A_\alpha \xrightarrow{\tau} A$（$\mathfrak{R}$ において）ならば $\varphi(A_\alpha) \to \varphi(A)$ となる場合をいう．2つの位相 τ_1, τ_2 が $\tau_1 \prec \tau_2$ であれば，τ_1-連続な φ は τ_2-連続でもある．

〈定理 2.18〉 上記の $\mathfrak{R}, \varphi$ に対して次は同値である．（1） φ が $\mathfrak{R}$ 上で $\tau^{u.w}$-連続．（2） φ が $\mathfrak{R}$ 上で $\tau^{u.s}$-連続．（3） φ が $\mathfrak{R}$ 上で $\tau^{u.s*}$-連続．（4） $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty, \sum_n \|y_n\|^2 < \infty$ なる点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset \mathscr{H}$ が存在して $\varphi(A) = \sum_n \langle x_n, Ay_n \rangle$, $\forall A \in \mathfrak{R}$ と書ける．（5） φ が $\mathfrak{R} \cap \mathscr{B}$ 上で τ^w-連続．（6） φ が $\mathfrak{R} \cap \mathscr{B}$ 上で τ^s-連続．（7） φ が $\mathfrak{R} \cap \mathscr{B}$ 上で τ^{s*}-連続．（ここで $\mathscr{B}$ は $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の一様有界な部分集合である．）

〈定理 2.19〉 上記の $\mathfrak{N}, \varphi$ に対して次は同値である．（1） φ が $\mathfrak{N}$ 上で τ^w–連続．（2） φ が $\mathfrak{N}$ 上で τ^s–連続．（3） φ が $\mathfrak{N}$ 上で τ^{s*}–連続．（4） $\{x_n\}_{n=1}^N, \{y_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{H}$, $N<+\infty$ が存在して $\varphi(A)=\sum_{n=1}^N \langle x_n, Ay_n\rangle$, $\forall A\in\mathfrak{N}$ と書ける．

さらに Hahn–Banach の定理と Krein–Šimuljan の定理および性質 $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})^*=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ より次の定理が証明される．

〈定理 2.20〉 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の凸部分集合 C に対して次は同値．（1） C は $\tau^{u.w}$–閉．（2） C は $\tau^{u.s}$–閉．（3） C は τ^{us*}–閉．（4） $C\cap\mathcal{B}_1$ は τ^w–閉．（5） $C\cap\mathcal{B}_1$ は τ^s–閉．（6） $C\cap\mathcal{B}_1$ は τ^{s*}–閉．

$\mathfrak{N}$ 上の τ^u–連続な線形汎函数の全体 $\mathfrak{N}^*$ の様々な部分集合を導入しておこう．（a） **状態の集合** $\mathfrak{S}\equiv\{\varphi\in\mathfrak{N}^*; \|\varphi\|=1\}$．（b） **ベクトル状態**の集合 $\mathfrak{S}_v\equiv\{\varphi\in\mathfrak{S}; \varphi(A)=\langle x, Ax\rangle, \forall x\in\mathcal{H}, \forall A\in\mathfrak{N}\}$．（c） $\mathfrak{N}_\sim\equiv\{\varphi\in\mathfrak{N}^*; \varphi$ は τ^w–連続$\}$．（d） $\mathfrak{N}_*\equiv\{\varphi\in\mathfrak{N}^*; \varphi$ は $\tau^{u.w}$–連続$\}$．これらの定義より，容易に（i） $\mathfrak{S}\cap\mathfrak{N}_\sim$ は $\mathfrak{S}_v$ の凸包，（ii） $\overline{\mathfrak{N}_\sim}=\mathfrak{N}_*$ （$^-$は $\mathfrak{N}^*$ のノルム位相に関する閉包）がわかる．さらに，

〈定理 2.21〉 $\mathfrak{N}_*$ は $\mathfrak{N}^*$ のノルムで Banach 空間となり，かつ，$(\mathfrak{N}_*)^*=\mathfrak{N}$ である．

$\mathfrak{N}$ 上の正の線形汎函数 φ が**正規** (normal) であるとは，$\mathfrak{N}_+$ に上限 A をもつ増大ネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}_+$ （$A_\alpha\uparrow A=\sup A_\alpha$）に対して $\varphi(A)=\sup\varphi(A_\alpha)$ となる場合をいう．次の定理は非常に重要である．

〈定理 2.22〉 $\mathfrak{N}$ 上の正の線形汎函数 φ に対して，次は同値．（1） φ が正規．（2） φ が σ 加法的（すなわち，互いに素な任意の射影の族 $\{P_\alpha\}\subset\mathfrak{N}$ に対して $\varphi(\sum_\alpha P_\alpha)=\sum_\alpha\varphi(P_\alpha)$）．（3） $\varphi\in\mathfrak{N}_*$．（4） $\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})^+$ が存在して $\varphi(A)=\mathrm{tr}\,\rho A$, $\forall A\in\mathfrak{N}$ と表せる．

$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に 7 つの位相を導入したが，v. N. 代数 $\mathfrak{N}$(i. e., $\mathfrak{N}''=\mathfrak{N}$) に関しては τ^u 以外の位相の相異は見かけ上のものにすぎない．すなわち，

〈定理 2.23〉 **von Neumann の稠密定理：**$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の $*$ 部分代数 $\mathfrak{N}$ が $\mathfrak{N}\ni I$ のとき，次は同値である：
（1） $\mathfrak{N}''=\mathfrak{N}$．（2） $\overline{\mathfrak{N}}^w=\mathfrak{N}$．（2′） $\overline{\mathfrak{N}}_1{}^w=\mathfrak{N}_1$．（3） $\overline{\mathfrak{N}}^s=\mathfrak{N}$．（3′） $\overline{\mathfrak{N}}_1{}^s=\mathfrak{N}_1$．（4） $\overline{\mathfrak{N}}^{s*}=\mathfrak{N}$．（4′） $\overline{\mathfrak{N}}_1{}^{s*}=\mathfrak{N}_1$．（5） $\overline{\mathfrak{N}}^{uw}=\mathfrak{N}$．（5′） $\overline{\mathfrak{N}}_1{}^{u.w}=\mathfrak{N}_1$．（6） $\overline{\mathfrak{N}}^{u.s}=\mathfrak{N}$．（6′） $\overline{\mathfrak{N}}_1{}^{us}=\overline{\mathfrak{N}}_1$．（7） $\overline{\mathfrak{N}}^{us*}=\mathfrak{N}$．（7′） $\mathfrak{N}_1{}^{us*}=\mathfrak{N}_1$．

この定理は $\mathfrak{N}\ni I$ より弱い条件 $\{\mathfrak{N}\mathcal{H}\}^-=\mathcal{H}$ （すなわち，$\mathfrak{N}$ が非縮退）の下でも成立する．さらに，$\mathfrak{N}\not\ni I$ のときでも $\overline{\mathfrak{N}}^{us*}=\mathfrak{N}$ であれば，すべての $A\in\mathfrak{N}$ に対して $AE=$

$EA=A$ となる最大の射影 $E\in\mathfrak{N}$ が存在して $E:\mathcal{H}\to\{\mathfrak{N}\mathcal{H}\}^-$ となり，$\mathfrak{N}''=\boldsymbol{C}I+\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}=E\mathfrak{N}''E$ が成立する．このことから，$\mathfrak{N}$ の $\overline{\mathrm{ran}\,E}=E\mathcal{H}$ への制限 $\mathfrak{N}_E$ は v. N. 代数 (i. e., $\mathfrak{N}_E''=\mathfrak{N}_E$) であることがわかる（ここで $\mathfrak{N}_E$ の単位元は E）．これはかなり応用性のある事実である．

さて，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の自己共役な線形空間 $\mathcal{S}$ に対して，任意の $A\in\overline{\mathcal{S}}^s$ をとるとネット $\{A_\alpha\}\subset\mathcal{S}$ が存在して $A_\alpha\xrightarrow{s}A$ であるが，$A^*=A$ ならば，A_α として自己共役のものがとれる．このことと，〈定理 2.17〉より $\mathfrak{N}''$ の自己共役な元 A に対しては，A に収束する自己共役なネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}$ が存在するが，各 α において A_α は一様有界であるとは限らないから，$A_\alpha{}^2\to A^2$ などは成立するかどうか定かではない．これを保証するのが次の定理である．

〈定理 2.24〉 Kaplansky の稠密定理

$\mathfrak{N}$ を $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の＊部分代数とする．任意の $A\in\overline{\mathfrak{N}}^w$ に対して，A に収束するネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}$ で次の条件を満たすものが存在する．(i) 各 α において，$\|A_\alpha\|\leqq\|A\|$，(ii) $A_\alpha\xrightarrow{us*}A$.

$\mathfrak{N}$ が代数であるから，$A\in\overline{\mathfrak{N}}^w$ であれば，$A/\|A\|\in(\overline{\mathfrak{N}}^w)_1$ である．したがって上の定理は $\overline{\mathfrak{N}_1}^{us*}=(\overline{\mathfrak{N}}^w)_1$ **と書き変えることができる**．この稠密定理の簡単な応用として，

〈定理 2.25〉 $\mathfrak{N}$ を I を含む $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の＊部分代数とするとき，$\mathfrak{N}''=\mathfrak{N}\Longleftrightarrow\mathfrak{N}_1$ が $\tau^{u.w}$-コンパクト．

ここで可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の v. N. 代数に関する基本的な結果を記しておこう．

〈定理 2.26〉 可分な Hilbert 空間上の v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ において；(1) $\mathfrak{N}_1$ は強（および弱）位相に関して距離付け可能である；(2) $\mathfrak{N}$ は可算個の元から生成される．

(1) は $\mathcal{H}$ の可分性より可算個からなる正規直交分離ベクトル列 $\{x_n\}$ (i. e., $Ax_n=0$, $\forall n\in N\Rightarrow A=0$) が存在するが，これを使って $d(A,B)=\sum_n 2^{-n}\|(A-B)x_n\|$ と定めると，これは $\mathfrak{N}_1$ の強位相に関する距離になることによる．この結果より，$\mathfrak{N}_1$ で稠密な可算個の列 $\{A_n\}$ が存在するので，$\mathfrak{M}$ を $I, A_n, A_n^*, \forall n\in\boldsymbol{N}$ から作られる $\mathfrak{N}$ の部分代数とすると，$\mathfrak{M}''=\mathfrak{N}$ で (2) が証明された．

コンパクトな Hausdorff 空間Xに対して，ある $C(X)$ は1つの実函数から生成されるという **Rickart の補題**を使って次の von Neumann の定理が示される．

〈定理 2.27〉 可分な Hilbert 空間上の可換な v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ は1つの自己共役な作用素 $A\in\mathfrak{N}$ によって生成される (i. e., $\mathfrak{N}=\{A\}''$).

2.8　射影作用素と σ 有限 von Neumann 代数

v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ に属する射影作用素（以下，単に**射影**ということもある）の全体を $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ で表す．ある族 $\{E_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ に対して $\vee E_j$ は $\mathcal{H}$ から $\{\cup E_j\mathcal{H}\}^-$ への射影を表し，$\wedge E_j$ は $\mathcal{H}$ から $\cap E_j\mathcal{H}$ への射影を表す．任意のユニタリー作用素 $U'\in\mathfrak{N}'$ に対して $U'E_j\mathcal{H}=E_jU'\mathcal{H}=E_j\mathcal{H}$ であるから，$[\vee E_j, U']=0$，$[\wedge E_j, U']=0$ がわかる．ゆえに，$\vee E_j\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$, $\wedge E_j\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ となり $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ が**完備直補束**になっていることがわかる．$E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ の直補元は $E^{\perp}=I-E$ である．ここで，$\vee E_j$，$\wedge E_j$ はそれぞれ $\sup\{E_j\,;\,j\in J\}$，$\inf\{E_j\,;\,j\in J\}$ に対応する射影である．

さらに $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}{}''=\mathfrak{N}$ が簡単に示される．すなわち，$\mathfrak{N}$ は $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ によって生成されている．

v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ に関して，$\mathcal{Z}=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}'$ を $\mathfrak{N}$ の**中心** (center) といい，$\mathcal{Z}=\boldsymbol{C}I$ である v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ を**因子**または，**ファクター** (factor) という．$\mathcal{Z}$ は当然 v. N. 代数であり，$\mathfrak{N}\vee\mathfrak{N}'$（$\mathfrak{N}$ と $\mathfrak{N}'$ より生成される v. N. 代数）は $\mathcal{Z}'$ に等しい．$E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}\cap\mathcal{Z}$ である射影を**中心射影** (central projection) といい，この全体を $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ で表す．

$A\in\mathfrak{N}$ に対して，$z(A)\equiv\wedge\{E\in\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}\,;\,EA=A\}$ は $\mathcal{H}$ から $\{\mathfrak{N}A\mathcal{H}\}^-$ への射影作用素である．とくに，$E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ に対する $z(E)$ は E を含む最小の中心射影であり，E の**中心台** (central support) といわれる．任意の $\{E_j\}\subset\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ に対して，$z(\vee E_j)=\vee z(E_j)$ が成立する．

任意の $E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ に対して，$\mathfrak{N}_E$, $(\mathfrak{N}')_E$ をそれぞれ v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ の $E\mathcal{H}$ への制限とすると（$E\mathcal{H}$ 上では $\mathfrak{N}_E$ は $E\mathfrak{N}E$ と同一視できる），これらは $E\mathcal{H}$ 上の v. N. 代数であり，$(\mathfrak{N}_E)'=(\mathfrak{N}')_E$ となる．さらに $\mathfrak{N}_E\cap\mathfrak{N}_E{}'=\mathcal{Z}_E$ も示せる．

ところで2つの射影 $E, F\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ が**同値**（$\boldsymbol{E\sim F}$ と書く）であるとは，ある半等距離作用素 $W\in\mathfrak{N}$ が存在して，$E=W^*W$，$F=WW^*$ と表せる場合をいう．この関係～は $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ の同値関係を与える．

註　一般に W^*W が射影ならば WW^* も射影になり，W^*W を W の初期射影，WW^* を W の終射影という．

E が F の部分射影 $F_1\leqq F$ (i. e., $\mathrm{ran}\,F_1\subset\mathrm{ran}\,F$) に同値であるとき，$E\prec F$ と書く．$\prec$ は $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ に順序を与える．これらに関して次の事が容易に証明できる．(a)　$P_x=x\otimes\bar{x}$, $\forall x\in\mathcal{H}(\|x\|=1)$ に対して $E\prec P_x$ ならばある $y\in\mathcal{H}$ が存在して $E=P_y=y\otimes\bar{y}$ と書ける．(b)　$E\sim F\Rightarrow z(E)=z(F)$.

〈定理 2.28〉（1）　$\mathfrak{N}$ の2つの互いに直交する射影族 $\{E_j\}, \{F_j\}$ において，$E_j\sim F_j$ であれば $\vee E_j\sim\vee F_j$ である．（2）　**Schröder-Bernstein 型定理**：$E, F\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ において，$E\prec F$ かつ $F\prec E$ ならば $E\sim F$ である．

任意の元 $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$EA=A$ となる最小の射影 $E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ を A の**左の台** (left

support) といい，$s_l(A)$ で表す．また $AE=A$ となる最小の $E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ を A の**右の台** (right support) といい，$s_r(A)$ で表す．この定義より，$s_l(A):\mathcal{H}\to\{A\mathcal{H}\}^-$, $s_r(A):\mathcal{H}\to\{A^*\mathcal{H}\}^-$ であり，したがって $s_r(A)=s_l(A^*)$ である．さらに，K_A を $\mathcal{H}$ から $\ker A\equiv\{x\in\mathcal{H}\,;\,Ax=0\}$ への射影とすると $s_r(A)=K_A{}^\perp$ とも表せる．$s_r(A)=s_l(A^*)$ より $A^*=A$ のときは $s_r(A)=s_l(A)$ となり，これを $s(A)$ と書き **A の台**という．また任意の $A\in\mathfrak{R}$ に対して，$s_l(A)=s(AA^*)$，$s_r(A)=s(A^*A)$ となるが，とくに，半等距離作用素 W に対しては $W^*W\mathcal{H}$ が初期空間，$WW^*\mathcal{H}$ が終空間であるから，$s_r(W)=W^*W$，$s_l(W)=WW^*$ となる．今 A の極分解を $A=W|A|$ と書くと，$s(|A|)=W^*W$ であり，$A=|A^*|W$ とも表せるから，$s(|A^*|)=WW^*$．したがって $s_r(A)=s(|A|)$，$s_l(A)=s(|A^*|)$ とも表せる．これらを使って，

〈**定理 2.29**〉 $A\in\mathfrak{R}$, $E,F\in\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ に関して；（1） $s_l(A)\sim s_r(A)$；（2） $E\vee F-E\sim F-(E\wedge F)$；（3） $E\mathfrak{R}F\neq\{0\}\Longleftrightarrow z(E)z(F)\neq 0\Longleftrightarrow E_1,F_1\in\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ が存在して，$0\neq E_1\leqq E$, $0\neq F_1\leqq F$ で $E_1\sim F_1$.

（3）の同値条件が成立しないとき (i.e., $z(E)z(F)=0$) E と F は**互いに素**であるといい，$E\,\flat\,F$ で表す．これは E と F が直交する $E\perp F$ (i.e., $EF=0$) よりも強い条件である．$E\,\flat\,E^\perp$ ならば $E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{Z}}$ である．

〈**定理 2.30**〉 **比較定理**：$E,F\in\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ に対して，$P\in\mathcal{P}_{\mathfrak{Z}}$ が存在して，$FP\prec EP$ かつ $EP^\perp\prec FP^\perp$ を満たす．

v.N. 代数 $\mathfrak{R}$ の任意の互いに直交する射影族が高々可算集合であるとき，$\mathfrak{R}$ は **σ-有限**であるという．たとえば，可分な Hilbert 空間上の v.N. 代数は，〈定理 2.26〉より σ-有限である（逆は不成立）．したがって，σ-有限でない v.N. 代数はあまり重要ではない．

〈**定理 2.31**〉 v.N. 代数 $\mathfrak{R}$ において次は同値．（1） $\mathfrak{R}$ が σ-有限．（2） $\mathfrak{R}$ に関して分離的な可算個の元からなる $\mathcal{L}(\subset\mathcal{H})$ が存在する．（3） $\mathfrak{R}$ 上に忠実な正規状態が存在する．（4） 巡回かつ分離ベクトルをもつ v.N. 代数 $\mathfrak{M}$ が存在して $\mathfrak{R}$ と $\mathfrak{M}$ は同型．

2.9 von Neumann 代数の型

$\mathcal{H}$ 上の v.N. 代数 $\mathfrak{R}$ において，$E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{R}'}$ を取ってくると，$E\mathcal{H},E^\perp\mathcal{H}$ はともに $\mathfrak{R}$ の下で不変である．すなわち $\mathcal{H}=E\mathcal{H}\oplus E^\perp\mathcal{H}$ と書ける．さらに $E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{Z}}$ であれば $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_E\otimes\mathfrak{R}_{E^\perp}$ と表すことができ，したがって，$\mathfrak{R}$ の研究には $\mathfrak{R}$ より小さい v.N. 代数 $\mathfrak{R}_E,\mathfrak{R}_{E^\perp}$ の研究に帰することができる．そこで，v.N. 代数 $\mathfrak{R}$ はどのような v.N. 部分代数の直和に分解できるかを調べてみよう．

〔**定義 2.6**〕 $E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ に関して

（1） E が**有限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $E\sim F\leqq E$ ならば $E=F$.

（2） E が**半有限** (semifinite) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $0\neq F\leqq E$ である任意の F が 0 でない有限射影 $G\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ を含む（$\prec$の意味で).

（3） E が**無限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ E は有限でない.

（4） E が**純無限** (purely infinite) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ E は半有限でない.

（5） E が**固有無限** (properly infinite) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $P\in\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ に対して PE が 0 または無限射影.

（6） E が**可換** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $E\mathfrak{N}E$ が可換.

これらの定義より $E,F\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ に対して，（a） 可換な E は有限，（b） E が可換で $F\prec E$ ならば F も可換，（c） E が有限で $F\prec E$ ならば F も有限，であることが容易にわかる.

v.N. 代数は次のようにいくつかの型に分けられる.

〔**定義** 2.7〕 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ において

（1） $\mathfrak{N}$ が**有限型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 恒等作用素 I が有限.

（2） $\mathfrak{N}$ が**半有限型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I が半有限.

（3） $\mathfrak{N}$ が**純無限型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I が純無限.

（4） $\mathfrak{N}$ が**固有無限型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I が固有無限.

（5） $\mathfrak{N}$ が **I 型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ が 0 以外の可換射影を含む.

（6） $\mathfrak{N}$ が **II 型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が I 型でなくかつ半有限.

（7） $\mathfrak{N}$ が **III 型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が 0 以外の有限射影を含まない.

（8） $\mathfrak{N}$ が $\mathbf{I}_{\text{有限}}$ **型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が有限な I 型.

（9） $\mathfrak{N}$ が $\mathbf{I}_{\infty}$ **型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が固有無限な I 型.

（10） $\mathfrak{N}$ が $\mathbf{II}_{1}$ **型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が有限なII型.

（11） $\mathfrak{N}$ が $\mathbf{II}_{\infty}$ **型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が固有無限なII型.

（この定義で（3）と（7）は実は同じものである．また，I 型を**離散型**，そうでないものを**連続型**という.）

互いに素な可換 (resp. 有限) 射影族 $\{E_j : j\in J\}$ の和 $\sum_j E_j$ は可換 (resp. 有限) であることがわかるが，このことより，

〈**定理** 2.32〉 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ に対して；5 つの E_k $(k=1,2,\cdots,5)\in\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ が一意に存在して，$\sum_{k=1}^{5}E_k=I$ かつ（i） $\mathfrak{N}E_1$ が I_n 型；（ii） $\mathfrak{N}E_2$ が I_∞ 型；（iii） $\mathfrak{N}E_3$ が II_1 型；（iv） $\mathfrak{N}E_4$ が II_∞ 型；（v） $\mathfrak{N}E_5$ がIII型となる.

この定理より $\mathfrak{N}$ がファクターのとき，$\mathfrak{N}$ は5つ型のどれかであることがわかる．さらに，次の結果も有用である．（1） $\mathfrak{N}$が離散的 (resp. 半有界)$\Longleftrightarrow$可換 (resp. 有限) 射影 $E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ が存在して $z(E)=I$．（2） $\mathfrak{N}$ が可分な Hilbert 空間上のファクターであるとき，任意の無限射影 $E,F\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ は同値である (i. e., $E\sim F$)．（3） 任意の $E\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ に対して，$\mathfrak{N}$ が I(resp. II, III) 型ならば $\mathfrak{N}_E$ も I(resp. II, III) 型である．

$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ おけるトレース tr と同様に，v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ においても，もし可能ならば，トレースを考えることは有意義である．$\mathfrak{N}$ 上の**トレース** τ とは次の性質（i），(ii) をもつ $\mathfrak{N}_+$ から $\bar{\boldsymbol{R}}^+=[0,\infty]$ への写像である．ただし $0\times(+\infty)=0$ と約束する．（i） $\tau(\lambda A+B)=\lambda\tau(A)+\tau(B)$，$\forall A,B\in\mathfrak{N}_+$，$\lambda>0$，（ii） $\tau(A^*A)=\tau(AA^*)$，$\forall A\in\mathfrak{N}$.
この τ は一般に線形汎函数ではないが次の意味で線形汎函数 $\tilde{\tau}$ に拡張できる．

〈定理 2.33〉 $\mathcal{F}=\{A\in\mathfrak{N}_+\,;\,\tau(A)<\infty\}$，$\mathcal{I}=\{A\in\mathfrak{N}\,;\,A^*A\in\mathcal{F}\}$，$\mathcal{J}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_iA_iB_i;\ A_iB_i\in\mathcal{I},\ n<+\infty\right\}$ とおくと，$\mathcal{J}$ は$\mathfrak{N}$の両側イデアルである．このとき，$\mathcal{J}$ 上の線形汎函数 $\tilde{\tau}$ が一意に存在して，$\tilde{\tau}\upharpoonright\mathcal{J}\cap\mathfrak{N}_+=\tau$ かつ $\tilde{\tau}(AB)=\tilde{\tau}(BA)$ ($\forall A\in\mathcal{J}$，$\forall B\in\mathfrak{N}$) を満たす．

このトレース τ に関して，

（1） τ が**忠実** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A\in\mathfrak{N}_+$，$\tau(A)=0$ ならば $A=0$.

（2） τ が**正規** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A_\alpha\uparrow A(\in\mathfrak{N}_+)$ に対して $\tau(A_\alpha)\uparrow\tau(A)$.

（3） τ が**有限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tau(A)<\infty$，$\forall A\in\mathfrak{N}_+$.

（4） τ が**半有限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $A\in\mathfrak{N}_+$ に対して，$B\in\mathfrak{N}_+$ が存在して $B\leqq A$ かつ $\tau(B)<\infty$.

註 （2）と（4）より τ が正規半有限であれば $\tau(A)=\sup\{\tau(B)\,;\,B\leqq A,\ \tau(B)<\infty\}$

（5） トレース族 $\{\tau_j\,;\,j\in J\}$ が**十分** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $A(\neq 0)\in\mathfrak{N}_+$ に対して，$j\in J$ が存在して $\tau_j(A)\neq 0$.

$\mathfrak{N}$ が有限 v. N. 代数のとき，ある互いに直交する射影族 $\{E_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}\subset\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ に対して，$\{F_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}\subset\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ を各 n において $E_n\sim F_n$ なる族とすると，点列 $\{F_n\}$ は0に収束することが示せて，この事実より次の定理が証明される．

〈定理 2.34〉 $\mathfrak{N}$ が有限型$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{N}$ は十分な正規有限トレースス族を有する．($\mathfrak{N}$ が σ-有限ならば忠実な正規有限トレースが存在する．)

有限トレースが正規であることと $\tau\upharpoonright\mathcal{Z}$ が正規であることは同値となるから，$\mathfrak{N}$ がファクターであれば有限トレース τ はつねに正規である．

τ が v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ の半有限正規トレースであるとき，中心射影 $E\in\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ が存在して，$\tau\upharpoonright\mathfrak{N}E^\perp=0$ で $\tau\upharpoonright\mathfrak{N}E$ が忠実となる．この E を τ の台といい，$\mathrm{s}(\tau)$ で表す．今 $\{\tau_j\,;$

$j\in J\}$ を $s(\tau_i)\perp s(\tau_j)$ $(i\neq j)$ を満たす $\mathfrak{N}$ 上の半有限正規トレース族とするとき，$\tau(A)=\sum_j \tau_j(A)$ で定められる τ もやはり半有限正規トレースとなる．さらに $\mathfrak{N}$ 上の任意の正規トレース τ に関しては $E\in\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ が一意に存在して τ は $\mathfrak{N}E$ 上で半有限となり，$A(\neq 0)\in\mathfrak{N}_+E^\perp$ に対しては $\tau(A)=+\infty$ となる．これらの事実を使って，

〈定理 2.35〉 $\mathfrak{N}$ が半有限 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{N}$ が忠実な半有限正規トレースをもつ．

$\mathcal{H}$ より $\{\mathfrak{N}'x\}$ への射影を E_x, $\{\mathfrak{N}x\}^-$ への射影を E_x' と書くと，$E_x\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}, E_x'\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}'}$. このとき任意の $x,y\in\mathcal{H}$ に対して "$E_x\prec E_y \Longleftrightarrow E_x'\prec E_y'$"，"$E_x$ が可換 (resp. 有限) $\Longleftrightarrow E_x'$ が可換 (resp. 有限)" が成立するが，これらより $\mathfrak{N}$ が半有限型 (resp. I, II, III 型) であることと $\mathfrak{N}'$ が半有限型 (resp. I, II, III 型) であることとが同値であることがわかる．

2.10 テンソル積

有限個の線形空間 X_k $(k=1,2,\cdots,n)$ に関して，次の性質をもつ線形空間 $\bigodot_{k=1}^n X_k$ が一意に存在する．(i) 各 $x_k\in X_k$ に関して線形となる $\bigotimes_{k=1}^n x_k\in\bigodot_{k=1}^n X_k$ が存在して，$\bigodot_{k=1}^n X_k$ はこれらの元の有限個の線形結合で表せる；(ii) 多重線形写像 $\Phi:\prod_{k=1}^n X_k\to Y$ (Y はある線形空間) に対して，多重線形写像 $\varphi:\bigodot_{k=1}^n X_k\to Y$ が一意に存在して，$\varphi(\otimes x_k)=\Phi(\{x_k\})$；(iii) $\{1,2,\cdots,n\}$ の有限分割 $\{\Omega_j\}$ に対して，同型写像 $\bigodot_{k=1}^n X_k\to\bigodot_j(\bigodot_{k\in\Omega_j} X_k)$ が一意に存在する．

ここで，X_k が Hilbert 空間 $\mathcal{H}_k$ であるとき，$\otimes x_k, \otimes y_k\in\bigodot\mathcal{H}_k$ に対して，$\langle\otimes x_x, \otimes y_k\rangle=\prod_k\langle x_k, y_k\rangle$ とおくと，この $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\bigodot\mathcal{H}_k$ 上に内積を定め，この内積に関して $\bigodot\mathcal{H}_k$ を完備化したものが Hilbert 空間 $\{\mathcal{H}_k\}$ のテンソル積 $\otimes\mathcal{H}_k$ である．

1° X_k が Hilbert 空間 $\mathcal{H}_k$ 上の v. N. 代数 $\mathfrak{N}_k$ のとき，$\bigodot\mathfrak{N}_k$ は $(\otimes A_k)(\otimes B_k)=\otimes A_kB_k$, $(\otimes A_k)^*=\otimes A_k^*$ によって＊代数となる．ここで，写像 $\pi:\bigodot\mathfrak{N}_k\to\boldsymbol{B}(\otimes\mathcal{H}_k)$ を $\pi(\otimes A_k)(\otimes x_k)=\otimes A_kx_k$ $(\forall A_k\in\mathfrak{N}_k, \forall x_k\in\mathcal{A}_k)$ で定めると，π は $\bigodot\mathfrak{N}_k$ の忠実な表現であり，$\pi(\bigodot\mathfrak{N}_k)''$ を **v. N. 代数のテンソル積**といい，$\otimes\mathfrak{N}_k$ で表す．

2° X_k が C* 代数 $\mathcal{A}_k$ であるとき，1° の場合と同様にして $\bigodot\mathcal{A}_k$ は＊代数となるが，これを C*-ノルム $\|\cdot\|_\alpha$ (i. e., $\|AB\|_\alpha\leqq\|A\|_\alpha\|B\|_\alpha$, $\|A^*A\|_\alpha=\|A\|_\alpha^2$ $(\forall A,B\in\bigodot\mathcal{A}_k)$) で完備化したものが C* 代数 $\otimes_k{}^\alpha\mathcal{A}_k$ である．このようなノルム $\|\cdot\|_\alpha$ はいくつもあるが，とくに次のものが重要である．任意の $A\in\bigodot\mathcal{A}_k$ に対して，(1) $\|A\|_{\max}=\sup\{\|\pi(A)\|;\pi$ は $\bigodot\mathcal{A}_k$ の表現$\}$；(2) $\|A\|_{\min}=\sup\{\|(\otimes_k\pi_k)(A)\|;\pi_k$ は $\mathcal{A}_k$ の表現$\}$；とおくと，$\|A\|_{\min}\leqq\|A\|_\alpha\leqq\|A\|_{\max}$ である．$\|\cdot\|_{\max}$ により $\bigodot\mathcal{A}_k$ を完備化したものを，**射影的 C* テンソル積**といい，$\otimes_k{}^{\max}\mathcal{A}_k$ で表し，$\|\cdot\|_{\min}$ によるものを単に，**C* テンソル積**といい，$\otimes_k\mathcal{A}_k$ で表す．

この章の議論は文献［S1, T4］に詳しい．

3. KMS 条件と von Neumann 代数

この付章では温度グリーン函数の境界条件として導かれた Kubo-Martin-Schwinger (KMS) 条件 [K 6, M 2] の数学的定式化を概説し，この条件が統計物理学における熱平衡状態を記述する最も適切な条件であるという以上に，Tomita と Takesaki の理論と結びつき v. N. 代数の発展にいかに寄与しているかを見ていくことにする．(詳しくは [H 1, R 3, T 2, T 7, V 1]，および，[A 5, A 6, B 7, C 3] を参照.)

3.1 KMS 条件

3つ組 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \alpha(\boldsymbol{R}))$ で表される C* 力学系を考える．状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ がある定数 β で α_t に関して **KMS 条件**を満たすとは，任意の $A, B\in\mathcal{A}$ に対して，複素函数 $F_{A,B}(z)$ が存在して，この函数が領域 $D_\beta\equiv\{z\in\boldsymbol{C}\,;\,-\beta<\mathrm{Im}\,z<0\}$ で ($\beta<0$ ならば $D_\beta\equiv\{z\in\boldsymbol{C}\,;\,0<\mathrm{Im}\,z<-\beta\}$) 解析的，$\bar{D}_\beta\equiv\{z\in\boldsymbol{C}\,;\,-\beta\leqq\mathrm{Im}\,z\leqq 0\}$ で有界かつ連続であり境界条件 $F_{A,B}(t)=\varphi(\alpha_t(A)B)$ かつ $F_{A,B}(t-i\beta)=\varphi(B\alpha_t(A))$ を満たす場合をいう．このように KMS 条件は β, α_t に依っているので，この条件を満たす φ を **(β, α_t)-KMS 状態**とよぶ．定義より次の事が容易にわかる．

1° $\varphi:(0, \alpha_t)$-KMS 状態 $\Longleftrightarrow\varphi:$ トレース状態.

2° $\varphi:(\beta, \alpha_t)$-KMS 状態 $\Longleftrightarrow\varphi:(-1, \alpha_{-\beta t})$-KMS 状態.

上記の一見抽象的な条件が平衡状態を定めていることを具体的な例から見てみよう．いま $\mathcal{A}$ として $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ をとり，H をある物理系の Hamiltonian, $\beta=1/kT$ (k : Boltzmann 定数，T : 絶対温度) とし，$\rho=e^{-\beta H}/\mathrm{tr}\,e^{-\beta H}$ とおく (ただし，$e^{-\beta H}\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$)．このとき ρ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のトレースクラスの作用素で $\mathrm{tr}\,\rho=1$ であるから $\varphi(A)=\mathrm{tr}\,\rho A$, $\forall A\in\mathcal{A}$ とおくと φ は $\mathcal{A}$ 上の状態になる．ところで Hamiltonian は系の力学的変化を与えるユニタリー群 $u_t(t\in\boldsymbol{R})$ を生成し (i. e., $u_t=\exp itH$)，これによって $\alpha_t(A)=u_tAu_{-t}$ が観測量 A の時間変化を定める．上で定めた状態 φ (これは Gibbs 状態といわれている) は確かに KMS 条件を満たしている．実際 $F_{A,B}(z)=\mathrm{tr}\,e^{-\beta H}\alpha_z(A)B/\mathrm{tr}\,e^{-\beta H}$ とおくとこれは D_β 上で解析的，$\bar{D}_\beta$ で有界かつ連続であり上記の境界条件を満たしている．しかもこの場合は，φ がただ1つの (β, α_t)-KMS 状態である．

さて一般論に話をもどそう．KMS 条件を平衡状態の記述に採用できることの大きな理由の1つは次の事実である．

〈定理 3.1〉 (β, α_t)-KMS 状態 φ は α-不変である．

略証 $F_{A,I}(t)=\varphi(\alpha_t(A))=F_{A,I}(t-i\beta)$．ゆえに $F_{A,I}(t)$ は実数．Schwartz の鏡像原理より $F_{A,I}(z)=\varphi(\alpha_z(A))$ は $\boldsymbol{C}$ で解析的かつ周期 $i\beta$ をもつ．条件より $\bar{D}_\beta$ で $\varphi(\alpha_z(A))$ は有界だから，$\varphi(\alpha_z(A))$ は $\boldsymbol{C}$ 全体で有界になる．したがって $\varphi(\alpha_z(A))$ は定数 $(=\varphi(A))$．▌

元$A\in\mathcal{A}$ が **α-解析的**であるとは $\mathcal{A}$-値な整函数 $A(z)$ が存在して $A(t)=\alpha_t(A)$ となる場合をいう．α-解析的な元の全体を $\mathcal{A}_\alpha(\subset\mathcal{A})$ で表すと $\overline{\mathcal{A}_\alpha}^{u}=\mathcal{A}$ がわかる．実際 $A\in\mathcal{A}$ に対して $A_n=\pi^{-1/2}n^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_t(A)e^{-nt^2}dt$ とおくと $A_n\in\mathcal{A}_\alpha$ であり，$\|A_n-A\|\to 0$ となる．もし $\mathcal{A}$ が v. N. 代数であれば $\overline{\mathcal{A}_\alpha}^{u.w}=\mathcal{A}$ である．

〈定理 3.2〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して次は同値．（1） $\varphi\in K_\beta(\alpha)$ $((\beta,\alpha_t)$-KMS状態の全体)．（2） $\varphi(AB)=\varphi(B\alpha_{i\beta}(A))$，$\forall A,\ B\in\mathcal{A}_\alpha$．（3） Fourier 変換をほどこした函数 $\hat{f}$ が $\mathcal{D}(\boldsymbol{R})(=C_0^\infty(\boldsymbol{R}))$ の元である f と任意の $A,B\in\mathcal{A}$ に対して

$$\int f(t)\varphi(\alpha_t(A)B)\,dt=\int f(t-i\beta)\varphi(B\alpha_t(A))\,dt$$

ここで $f(t-i\beta)=\int\hat{f}(\omega)e^{i\omega(t-i\beta)}d\omega$.

$\mathcal{J}_\varphi=\{A\in\mathcal{A}\,;\,\varphi(A^*A)=0\}$，$\mathcal{G}_\varphi=\{A\in\mathcal{A}\,;\,\pi_\varphi(A)=0\}$ とおくと，$\mathcal{J}_\varphi$ は左イデアル $\mathcal{G}_\varphi$ は両側イデアルで $\mathcal{G}_\varphi\subset\mathcal{J}_\varphi$ であることが容易にわかる．とくに $\varphi\in K_\beta(\alpha)$ である場合は $\mathcal{J}_\varphi=\mathcal{G}_\varphi$ である．ゆえに，$\varphi\in K_\beta(\alpha)$ であれば φ が忠実である (i. e., $\mathcal{J}_\varphi=\{0\}$) ことと，$\pi_\varphi$ が忠実である (i. e., $\mathcal{G}_\varphi=\{0\}$) ことは同値である．

ところで，ある状態 φ が定数 β において 2 つの異なる α_t に関して KMS 条件を満たすことがあるか？すなわち，α の一意性の問題がある．この問の答は，

〈定理 3.3〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ が忠実であれば φ をある定数 β で KMS 状態にする自己同型一径数群 $\alpha(\boldsymbol{R})$ は一意に定まる．

いま，$\varphi\in\mathfrak{S}$ の GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi,u_t{}^\varphi\}$ に関して，φ の $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ への**自然な拡張** $\tilde{\varphi}$ とは $\tilde{\varphi}(Q)=\langle x_\varphi,Qx_\varphi\rangle$，$\forall Q\in\pi_\varphi(\mathcal{A})''$で，$\alpha_t$ の自然な拡張は $\tilde{\alpha}_t(Q)=u_t{}^\varphi Qu_{-t}^\varphi$ である．$\varphi\in K_\beta(\alpha)$のとき $\tilde{\varphi}$ も $(\beta,\tilde{\alpha}_t)$-KMS 状態となり，Kaplansky の稠密定理を使うと，φ が忠実でなくとも $\tilde{\varphi}$ は必ず $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ 上で忠実な状態になることが示せる．このことと，上記の等式 $\mathcal{J}_\varphi=\mathcal{G}_\varphi$ より x_φ は $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ に関して分離ベクトルであることがわかる．

さらに以下の結果は基本的である．

3° $\varphi\in K_\beta(\alpha)$ に対して $\tilde{\alpha}_t(Q)=Q$，$\forall Q\in\mathcal{Z}_\varphi$.

4° $K_\beta(\alpha)=\{\varphi\}\Rightarrow\mathcal{Z}_\varphi=\boldsymbol{C}I$.

5° $\varphi\in\mathrm{ex}\,I(\alpha)\Rightarrow\pi_\varphi(\mathcal{A})'\cap u^\varphi(\boldsymbol{R})'=\boldsymbol{C}I$. （ここで $I(\alpha)$ は α-不変状態の集合である）

6° $\varphi\in K_\beta(\alpha)\cap\mathrm{ex}\,I(\alpha)\Rightarrow\varphi\in\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)\Longleftrightarrow\mathcal{Z}_\varphi=\boldsymbol{C}I$.

7° $K_\beta(\alpha)$ は弱＊位相でコンパクトであり，かつ凸集合である．したがって $K_\beta(\alpha)={}^{w*}\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)$.

3.2 Tomita-Takesaki の理論

Tomita は彼の画期的な論文［T 7］において，モジュラー作用素の重要さに気づき，

v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ とその可換子 $\mathfrak{N}'$ との間の関連を明らかにした(〈定理 3. 4〉). Takesaki はこの Tomita の仕事と KMS 条件の数学的定式化である Haag, Hugenholtz, Winnink の仕事との深い係わりを見い出し, KMS 条件が v. N. 代数の研究に本質的な役割を果たすことを示した [H 1, T 2].

いま, 巡回かつ分離ベクトル $x\in\mathcal{H}$ をもつv. N. 代数 $\mathfrak{N}$ を考えよう. ここで共役線形な作用素 S_0 及び F_0 を $S_0Ax=A^*x$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$), $F_0A'x=A'^*x$ ($\forall A'\in\mathfrak{N}'$) と定めると, これらの定義域は $D(S_0)\supset\mathfrak{N}x$, $D(F_0)\supset\mathfrak{N}'x$ である. S_0, F_0 とも可閉な作用素で, それぞれの閉作用素を $S=\bar{S}_0$, $F=\bar{F}_0$ で表すと等式

1° $S_0{}^*=F$, $F_0{}^*=S$

が成立する. 閉作用素 S の極分解を

2° $S=J\Delta^{1/2}$

と書くと, Δ は非有界な正の自己共役作用素で J は共役ユニタリー作用素になる (i. e., $\langle Jx, Jy\rangle=\langle y, x\rangle$, $J^2=I$). Δ は $\{\mathfrak{N}, x\}$ に関する**モジュラー作用素**, J は $\{\mathfrak{N}, x\}$ に関する**モジュラー共役作用素**とよばれている. これらの作用素は次の関係式を満たす.

3° $\Delta=FS$, $\Delta^{-1}=SF$.

4° $F=JSJ=\Delta^{1/2}J=J\Delta^{-1/2}$.

5° $J=J^*$, $J^2=I$, $J\Delta J=\Delta^{-1}$.

略証 $\Delta=S^*S=FS$. $S_0{}^2=I$, $F_0{}^2=I$ であるから $S=S^{-1}$, $F=F^{-1}$. したがって $J\Delta^{1/2}=S=S^{-1}=\Delta^{-1/2}J^*$. 極分解の一意性より $J^2=I$. よって $J^*=J$ で $\Delta^{1/2}=J\Delta^{-1/2}J^*=J\Delta^{-1/2}J$. ゆえに $F=S^*=(\Delta^{-1/2}J)^*=J\Delta^{-1/2}$. さらに, $SF=\Delta^{-1/2}JJ\Delta^{-1/2}=\Delta^{-1}$. ▌

註 これらの作用素 J, Δ, S, F は当然xによっている. したがって厳密には J_x, Δ_x 等と書くべきものである.

かなり複雑な計算の後に (たとえば [T 2] を見よ. この計算は Rieffel と Van Daele [R 3, V 1] によって簡単化された.) Tomita は次の結果を得た.

〈定理 3. 4〉 次が成立する. (1) $J\mathfrak{N}J=\mathfrak{N}'$, したがって, $J\mathfrak{N}'J=\mathfrak{N}$. (2) $JAJ=A^*$, $\forall A\in\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}'$. (3) $\Delta^{it}\mathfrak{N}\Delta^{-it}=\mathfrak{N}$, $\forall t\in\boldsymbol{R}$.

巡回かつ分離ベクトル $x\in\mathcal{H}$ に対して, 汎函数 φ を $\varphi(A)=\langle x, Ax\rangle$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) と定めると, これは忠実かつ正規な正の汎函数となるから, φ による GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi(\mathfrak{N})'', x_\varphi\}$ と $\{\mathcal{H}, \mathfrak{N}, x\}$ は同一視できる. ここで Δ は x にしたがって φ に依っているので, $\Delta^{it}A\Delta^{-it}=\sigma_t{}^\varphi(A)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) と書くと, この $\sigma_t{}^\varphi$ は上記の定理より $\mathfrak{N}$ の自己同型一径数群となる. さらに, Takesaki は次の重要な定理を証明した.

〈定理 3. 5〉 汎函数 φ は $\sigma_t{}^\varphi$ に関して, $\beta=-1$ で KMS 条件を満たしている.

この $\sigma_t{}^\varphi$ を $\{\mathfrak{N}, x\}$ に関するモジュラー自己同型写像といい, 〈定理 3. 3〉 よりこれは一意である.

Tomita–Takesaki 定理に係わる様々な議論は次節以降でもしばしば取り上げられる.

3.3 正　錐

Araki [A6], Connes [C3] によって導入された正錐 (positive cone) の特質を議論する.

巡回かつ分離ベクトル x をもつ v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ に対して, $j(A)=JAJ$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) で定義される共役線型な $*$ 同型写像 $j:\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}'$ を使って集合 $\mathcal{K}\equiv\{Aj(A)x\,;\,A\in\mathfrak{N}\}^-$ を定め, これを $(\mathfrak{N},x)$ に付随する (自然な) **正錐**という. (ここで J は x によっているので $j,\mathcal{K}$ とも $j_x,\mathcal{K}_x$ と書くべきであるがここでは簡単なため添字 x ははぶく.) たとえば, ある測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ において $\mathfrak{N}=L^\infty(X,\mu)$ のとき, $\mathcal{K}=L^2(X,\mu)_+$ である. この $\mathcal{K}$ は次の性質を有している.

〈定理 3.6〉　(1)　$\mathcal{K}=\{\Delta^{1/4}\mathfrak{N}_+x\}^-=\{\Delta^{-1/4}\mathfrak{N}'_+x\}^-=\{\Delta^{1/4}\{\mathfrak{N}_+x\}^-\}^-=\{\Delta^{-1/4}\{\mathfrak{N}'_+x\}^-\}^-$. ゆえに $\mathcal{K}$ は凸錐である. (2)　$Jy=y$, $\forall y\in\mathcal{K}$. (3)　$\Delta^{it}\mathcal{K}=\mathcal{K}$, $\forall t\in\boldsymbol{R}$. (4)　$Aj(A)\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$, $\forall A\in\mathfrak{N}$. (5)　f が正定値函数のとき, $f(\log\Delta)\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$.

さらに,

〈定理 3.7〉　(1)　$\mathcal{K}_x$ は自己双対凸錐である (i.e., $\mathcal{K}=\mathcal{K}^{\star}\equiv\{z\in\mathcal{H}\,;\,\langle z,y\rangle\geqq 0$, $\forall y\in\mathcal{K}\}$). (2)　$\mathcal{K}\cap(-\mathcal{K})=\{0\}$. (3)　$Jy=y$, $y=y_1-y_2$, $\forall y_1,y_2\in\mathcal{K}$, $y_1\perp y_2$ と一意に分解できる. (4)　$\mathcal{K}$ は $\mathcal{H}$ を代数的に張っている. (5)　$y\in\mathcal{K}$ のとき, y が $\mathfrak{N}$ に関して巡回的 (i.e., $\overline{\mathfrak{N}y}=\mathcal{H}$) $\Longleftrightarrow y$ が $\mathfrak{N}$ に関して分離的 (i.e., $Ay=0$, $A\in\mathfrak{N}\Rightarrow A=0$)　(6)　$y\in\mathcal{K}$ が $\mathfrak{N}$ に関して巡回的なとき, $J_y=J(=J_x)$, $\mathcal{K}_y=\mathcal{K}(=\mathcal{K}_x)$

$y\in\mathcal{H}$ に対して $\omega_y(A)=\langle y,Ay\rangle$ ($\forall y\in\mathfrak{N}$) と定めると, $\omega_y\in\mathfrak{N}_{*,+}$ (すなわち, 正の正規線形汎函数).

〈定理 3.8〉　位相同型写像 $\gamma:\mathfrak{N}_{*,+}\to\mathcal{K}$ が存在して; (1)　任意の $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して $\varphi=\omega_{\gamma(\varphi)}$; (2)　任意の $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して $\|\gamma(\varphi_1)-\gamma(\varphi_2)\|\leqq\|\varphi_1-\varphi_2\|\leqq\|\gamma(\varphi_1)-\gamma(\varphi_2)\|\|\gamma(\varphi_1)+\gamma(\varphi_2)\|$; (3)　$\varphi_1\leqq\varphi_2$ ならば $\gamma(\varphi_1)\geqq\gamma(\varphi_2)$ (i.e., $\gamma(\varphi_1)-\gamma(\varphi_2)\in\mathcal{K}$); (4)　γ は凹 (i.e., $\gamma(\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2)\geqq\lambda\gamma(\varphi_1)+(1-\lambda)\gamma(\varphi_2)$).

$\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して $\varphi(I-E)=0$ となる最小の射影 $E\in\mathfrak{N}$ を $\mathrm{s}(\varphi)$ と書き φ の台という. またベクトル $x\in\mathcal{H}$ に対して, v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ における台を $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)$ (i.e., $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x)$ は $(I-E)x=0$ となる最小の射影 $E\in\mathfrak{N}$), x の v.N. 代数 $\mathfrak{N}'$ における台を $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(x)$ と書く.

〈定理 3.9〉　(1)　$y_1,y_2\in\mathcal{K},y_1\perp y_2$ のとき $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(y_1)\perp\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(y_2)$ かつ $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(y_1)\perp\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(y_2)$. (2)　γ は台を保存する. すなわち, $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\gamma(\varphi))=\mathrm{s}(\varphi)$ かつ $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}'}(\gamma(\varphi))=j(\mathrm{s}(\varphi))$ (した

がって，$s^{\mathfrak{N}}(x_\varphi)=s(\varphi)$，$s^{\mathfrak{N}'}(x_\varphi)=j(s(\varphi))$．ここで x_φ は φ に関する GNS ベクトル)．
（3） $s(\varphi_1)\perp s(\varphi_2)$ ならば $\gamma(\varphi_1+\varphi_2)=\gamma(\varphi_1)+\gamma(\varphi_2)$.

ところで，2つの巡回かつ分離ベクトル $x,y\in\mathcal{H}$ と同位相写像 $\gamma_x:\mathfrak{N}_{*,+}\to\mathcal{K}_x$，$\gamma_y:\mathfrak{N}_{*,+}\to\mathcal{K}_y$ に対しては，ユニタリー作用素 $u\in\mathfrak{N}'$ が存在して $u\gamma_x(\varphi)=\gamma_y(\varphi)$ ($\forall\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$) となる．4つ組 $\{\mathfrak{N},\mathcal{H},J,\mathcal{K}\}$ を v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ の標準形という．これは σ-有限な v. N. 代数でなくてもユニタリー同値性を除いて一意に存在する [H 2].

4. 量子論的確率論

この付章では量子論的（非可換）確率論の定式化を述べ，その基礎的事柄を概説する．

4.1 測度論的確率論から量子論的確率論へ

まず量子論的確率論の定式化を通常の測度論的確率論の定式化と対比しながら見ていくことにする．以下量子論的確率論を QPT (Quantum Probability Theory) と略し，それに対応づける意味で通常の確率論を CPT (Classical Probability Theory) と略する．

$(X,\mathcal{F})$ を可測空間とし，μ を確率（あるいは有限）測度とする．また $\boldsymbol{R}$ の Borel 集合体を $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ と書く．確率変数 $f:X\to\boldsymbol{R}$(i. e., $f^{-1}(Q)\in\mathcal{F}$ ($\forall Q\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$)) の期待値，分散等を求めることが CPT において重要であるが，これらは f に関する確率分布 $\mu_f(Q)=\mu(f^{-1}(Q))$ あるいは確率分布函数 $F_f(t)=\mu_f((-\infty,t])$ ($t\in\mathcal{F}$) を使って次のように定義される．

（1） 期待値：$E(f)(=\langle f\rangle)=\int_X f\,d\mu=\int_{\boldsymbol{R}}\lambda\mu_f(d\lambda)=\int_{\boldsymbol{R}}\lambda dE_f(\lambda)$.

（2） 分散：$V(f)=E(\{f-E(f)\}^2)=E(f^2)-E(f)^2$.

なお，可測空間 $(X,\mathcal{F})$ において，$\mathcal{F}$ からある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の射影の全体 $\mathcal{P}$ の中への1対1写像 h が **σ-同型写像**（忠実なスペクトル測度）であるとは，(i) $h(X)=I$，(ii) $A,B\in\mathcal{F}$ が $A\cap B=\emptyset$ のとき $h(A)\perp h(B)$，(iii) 任意の $A_i\cap A_j=\emptyset$ ($i\neq j$) なる $\{A_i\}\subset\mathcal{F}$ に対して，$h\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum h(A_i)$ を満たす場合をいう．

〈定理 4.1〉 任意の可測空間 $(X,\mathcal{F})$ に対して；Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と σ-同型写像 h が存在して （1） $h:\mathcal{F}\to\mathcal{P}$；（2） X 上の確率測度 μ に対して，規格化されたベクトル x_μ が存在して，$\mu(Q)=\langle x_\mu, h(Q)x_\mu\rangle$ ($\forall Q\in\mathcal{F}$)；（3） $(X,\mathcal{F})$ 上の実確率変数の族 $\{f_\alpha\}$ に対して，$\mathcal{H}$ 上の観測量（自己共役作用素）の族 $\{A_\alpha\}$ が存在して，$E_\alpha(\varDelta)=h(f_\alpha{}^{-1}(\varDelta))$ ($\forall\varDelta\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$)．ここで E_α は A_α の $\boldsymbol{R}$ 上のスペクトル測度（単位の分解）である：$A_\alpha=\int\lambda E_\alpha(d\lambda)$.

略証 $(X,\mathcal{F})$ 上の確率測度の集合を $\boldsymbol{P}(X)=\{\mu_j\,;\,j\in J\}$ とおき，$\mathcal{H}_j=L^2(X,\mathcal{F},\mu_j)$ とおく．ここで $h_j(Q)$ ($\forall Q\in\mathcal{F}$) を $\mathcal{H}_j$ から $\{f\in\mathcal{H}_j\,;\,f(Q^c)=0\}^-$ への射影とすると，h_j は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{H}_j$ への σ-準同型写像である．$\mathcal{H}=\oplus_{j\in J}\mathcal{H}_j$(直和)，$h=\oplus_{j\in J}h_j$

とおけばこれが求めるものである．実際，h は1対1でありさらに，$\mu_j \in \boldsymbol{P}(X)$ に対して $x \in \mathcal{H}$ を $x_j=1$，$x_k=0$ $(k \neq j)$ と定めると，$(h(Q)y)_j = 1_Q y_j$ $(\forall y \in \mathcal{H}, \ \forall Q \in \mathcal{F})$ より $\langle x, h(Q)x \rangle = \mu_j(Q)$ がわかる．▌

したがって，可測空間 $(X, \mathcal{F})$ による記述は Hilbert 空間による記述 $(\mathcal{H}, \mathcal{P})$ に含まれてしまうことがわかる．

ところで，実際上考察の対象となる興味ある集合 X は何らかの仕方で位相が導入されている空間である．とくに次のような空間が重要である．（a） 完全正則空間，（b） 局所コンパクト Hausdorff 空間,（c） コンパクト Hausdorff 空間, ここで（c）⇒（b）⇒（a）であるが，完全正則空間は必ずコンパクト化（Stone-Čeck コンパクト化．とくに，局所コンパクトな場合は一点コンパクト化で十分）できるので，以下（c）の空間に限って話を進める．

コンパクト Hausdorff 空間 X の Borel 集合体（すなわち，X の開集合から生成される σ 集合体）を $\mathcal{B}(X)$ で表し，Baire 集合体（すなわち，開集合の可算列 $\{G_n\} \subset X$ に対して，$\bigcap_n G_n$ を G_δ 集合というが，コンパクトな G_δ 集合から生成される σ 集合体）を $\mathcal{B}_0(X)$ で表す．さらに，Borel 測度（i. e., $\mu(X) < \infty$）の全体を $M(X)$，Baire 測度の全体を $M_0(X)$，正則 Borel 測度（すなわち，$\mu(A) = \inf\{\mu(O) ; A \subset O, O$ は開集合$\} = \sup\{\mu(C) ; C \subset A$, C はコンパクトかつ Borel 集合$\}$）の全体を $M_r(X)$ で表し，X 上の複素数値連続函数の全体を $C(X)$ で表すと，$M_0(X)$ と $M_r(X)$ および $C(X)^*_+$（すなわち，$C(X)$ 上の正の線形汎函数の全体）の間には1対1の対応が存在する．とくに，$C(X)^*_+$ と $M_0(X)$（あるいは $M_r(X)$）との対応は **Riesz-Markov-Kakutani の定理**として知られている．すなわち，$\varphi \in C(X)^*_+$ に対して $\mu \in M_0(X)$ が一意に存在して，$\varphi(f) = \int_X f \, d\mu$，$\forall f \in C(X)$，と書ける．また，$X$ はコンパクト Hausdorff であるから，次の3つの条件は同値である：（i） X が第2可算公理を満たす．（ii） X が距離付け可能．（iii） $C(X)$ が可分．さらに，この3つの条件が満たされるとき，$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_0(X)$ となり，したがって $M(X) = M_0(X) = M_r(X)$ である．

ところで，単位元を含む可換な C* 代数 $\mathcal{A}$ においては，Gelfand-Naĭmark の表現定理（付章 2.2）より，コンパクト Hausdorff な（スペクトル）空間Xが存在して，$\mathcal{A} = C(X)$ と書ける．さらに，$\varphi \in C(X)^*_+$ とこれに対応する測度 $\mu \in M_0(X)$ に対して，GNS Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\varphi$ は $\mathcal{H}_\varphi = \mathcal{H}_\mu = L^2(X, \mu)$ となり，$C(X)$ の $\mathcal{H}_\mu$ 上への GNS 表現は $(\pi_\mu(f)g)(\cdot) = f(\cdot)g(\cdot)$ $(\forall g \in \mathcal{H}_\mu)$ で与えらられる．このとき，

〈定理 4.2〉 $\pi_\mu(C(X))'' = L^\infty(X, \mu)$．かつ，これは $\boldsymbol{B}(L^2(X, \mu))$ の極大可換な v. N. 代数である．

〈定理 4.3〉 $\mathfrak{N}$ を可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の可換な v. N. 代数とする．このとき第

2 可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間 X と，確率測度 μ が存在して，$\mathfrak{N}=L^\infty(X,\mu)$ と表せる．

以上の事実から，QPT を次のように定式化するのは自然であろう．

〈1〉 **v.N. 代数による定式化**：CPT における $X, \mathcal{F}, \mu$ に対応するものとして，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の全体 $\mathcal{P}$，ベクトル状態 φ をとり，確率変数には $\mathcal{H}$ 上の作用素を対応させるのが適当と思われるが，ここでは少々一般化して（ただし有界な作用素のみを考える），QPT を 4 つ組 $(\mathcal{H}, \mathcal{P}_{\mathfrak{N}}, \varphi, \mathfrak{N})$ で記述する．ここで $\mathfrak{N}$ は $\mathcal{H}$ 上の v. N. 代数，$\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ は $\mathfrak{N}$ に含まれる射影作用素の全体．φ は $\mathfrak{N}$ 上の正規状態である．

〈2〉 **C* 代数による定式化**：v. N. 代数による記述をさらに一般化して，下敷になっている空間 $\mathcal{H}$ は陽に考えず，C* 代数 $\mathcal{A}$ とその上の状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ の組 $(\mathcal{A},\varphi)$ が QPT を記述するものとする．このとき，φ を固定すれば，〈1〉の 4 つ組は $(\mathcal{H}_\varphi, \mathcal{P}_\varphi, \tilde{\varphi}, \pi_\varphi(\mathcal{A})'')$ で表せる．ここで $\tilde{\varphi}$ は φ の $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ への自然な拡張であり，$\mathcal{P}_\varphi$ は v. N. 代数 $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ に含まれる射影の全体である．この C* 代数による記述は，包絡 v. N. 代数 $\mathcal{A}''$ を考えれば〈1〉に含まれてしまう．すなわち，この場合の 4 つ組は $\mathcal{H}=\bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\mathcal{H}_\varphi$, $\mathcal{A}''$（すなわち，$\pi=\bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\pi_\varphi$ に対して $\mathcal{A}''=\pi(\mathcal{A})''$，これは $\mathcal{A}$ の第 2 共役空間 $\mathcal{A}^{**}=(\mathcal{A}^*)^*$ に等しい），$\mathcal{P}_{\mathcal{A}''}$ および，φ の $\mathcal{A}''$ への自然な拡張 $\tilde{\varphi}$ である．

〈1〉,〈2〉以外でも，たとえば Davies [D 2], Plymen [P 4] 等によって議論されていて，局所コンパクト Hausdorff 空間 X とその上の $\mathcal{B}_0(X)$, $M_0(X)$ の非可換への拡張である $\sum^*$-代数による定式化もあるが，これは実際上必要な，可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上では〈1〉に帰着する．

本書では主に〈1〉の立場で QPT を考えていくことにするが，〈2〉の立場をとることもある CPT と QPT の比較を表示しておく．

〈CPT〉	〈QPT〉
X	$\mathcal{H}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$
$\mu\in P(X)$	$\varphi\in\mathfrak{S}$
$L^\infty(X,\mathcal{F})$	$\mathfrak{N}$
$A,B\in\mathcal{F}$ に対して	$E,F\in\mathcal{P}$ に対して
$A\subset B$	$E\leqq F$
$A\cup B$	$E\vee F$
$A\cap B$	$E\wedge F$
$A^c=X-A$	$E^\perp=I-E$

CPT $(X,\mathcal{F},\mu,L^\infty)$ において，ある確率変数 $f\in L^\infty$ が $Q\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ に値をとる確率は $\int_X 1_{f^{-1}(Q)}d\mu=\mu(f^{-1}(Q))$ で与えられるが，QPT $(\mathcal{H},\mathcal{P},\varphi,\mathfrak{N})$ では $A=A^*\in\mathfrak{N}$ のスペ

クトル分解を $\int_{\boldsymbol{R}} aE_A(da)$ とすると A が $Q\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ に値をとる確率は $\varphi(E_A(Q))$ と表せる．$\varphi_A(Q)=\varphi(E_A(Q))$ とおくとこれは CPT の確率分布 $\mu_f(Q)$ に対応するものである．しかしながら，この φ_A を使って CPT と同様に同時確率分布を作ろうとしてもうまくいかない．つまり，CPT において，f,g を2つの確率変数とするとき，$\mu_{f,g}(Q\times S)=\mu(f^{-1}(Q)\cap g^{-1}(S))$ $(\forall Q,S\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$ を同時確率分布というが，これをまねて，QPT において2つの自己共役作用素 A,B に対して $\varphi_{A,B}(Q\times S)=\varphi(E_A(Q)\wedge E_B(S))$ $(\forall Q,S\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$ と $\varphi_{A,B}$ を定めても，これは A と B が可換でない限り．同時確率分布にはならない．つまり，任意の $Q_1\cap Q_2=\emptyset$ となる $Q_1,Q_2\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ に対して，$\mu_{f,g}((Q_1\cup Q_2)\times S)=\mu_{f,g}(Q_1\times S)+\mu_{f,g}(Q_2\times S)$ となるが，$\varphi_{A,B}$ においてはこの等式は $AB\neq BA$ の場合には一般に成立しない．さらに，$Q\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ と $a,b\in\boldsymbol{R}$ に対して CPT では $\mu_{f,g}\{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\,a\lambda_1+\lambda b_2\in Q\}=\mu\{t\in X\ ;\ af(t)+bg(t)\in Q\}$ が成立するが，QPT ではこの等式も $AB=BA$ でなければ一般には成立しない．すなわち，$C=aA+bB$ とおくと任意の φ に対して $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})^2$ 上の測度 $\mu^{\varphi}_{A,B}$ が存在して，$\mu^{\varphi}_{A,B}\{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\,a\lambda_1+b\lambda_2\in Q\}=\varphi(E_C(Q))$ は $AB=BA$ でなければ一般には成立しないのである［U 26］．

このように，同時確率分布が一般には存在しないことが QPT を難しくしている．これに変わるものの1つとして第 11 章の §11.2 で概説した Ohya［O 6］による合成状態がある．

4.2　Radon-Nikodym の定理

CPT における Radon-Nikodym の定理は次のように表される．可測空間 $(X,\mathcal{F})$ 上の有限測度 μ（σ-有限でもよい）に対して，他の有限測度 ν が**絶対連続**（すなわち，$A\in\mathcal{F}$，$\mu(A)=0\Rightarrow\nu(A)=0$ このとき $\nu\ll\mu$ と書く）であるとき，μ-a.e. の意味で，$f\in L^1(X,\mu)$ が存在して $\nu(A)=\int_A f\,d\mu$ $(\forall A\in\mathcal{F})$ と書ける．この結果はCPTにおいて基本的役割を果たすものである．QPT では，この Radon-Nikodym の定理（R. N. T. と略す）は次の問に答えることによって表すことができる．

“ある C* 代数 $\mathcal{A}$ 上の2つの $\varphi,\psi\in\mathcal{A}^*_+$ が $\psi\ll\varphi$ (i.e., $\varphi(A^*A)=0\Rightarrow\psi(A^*A)=0$)を満たすとき，$\mathcal{H}_\varphi$ 上のある作用素 T が存在して，ψ を φ と T によって表すことができるか？” この節ではこの問題を考えていこう．なお，$\psi\ll\varphi$ であるとき，CPT と同様 ψ は φ に関して**絶対連続**，または，**φ-絶対連続**であるという．また上記の T が存在すれば，この T を **Radon-Nikodym 微分**(R. N. D と略) とよぶことにする．付章 2.4 項の〈定理 2.14〉に記したように，$\psi\ll\varphi$ より強い条件 $\psi\leqq\varphi$ ((i.e., $\varphi-\psi\in\mathcal{A}^*_+$) が満たされるとき，$T\in\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ が一意に存在して $\psi(A)=\langle x_\varphi,T\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$ と表すことができたが，様々な理由から T を $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ からとることができると都合がよい．さらに $\psi\leqq\varphi$ でなく $\psi\ll\varphi$ の場合に，$T\in\pi_\varphi(\mathcal{A})$ または，$T\eta\pi_\varphi(\mathcal{A})''$（記号 η は T が $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ に**付随的**であることを表す．すなわち，$\pi_\varphi(\mathcal{A})'\mathrm{dom}\,T\subset\mathrm{dom}\,T$ かつ $QT\subset TQ(\forall Q\in\pi_\varphi(\mathcal{A})'))$ ととれるかどうかが問題である．しかし $\psi\ll\varphi$ の場合は $\psi\leqq\varphi$ の場合に比べて目立った結

果はない．なお，上の T は $\dfrac{d\psi}{d\varphi}$ と書くこともある．

以下 C^* 代数 $\mathcal{A}$ と $\varphi,\psi\in\mathcal{A}^*_+$ の代わりに簡単のために，v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ と $\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に関して議論を進める．

まず Dye [D 12] と Segal [S 5] の結果をまとめておく

〈定理 4.4〉 (I) v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ と $x\in\mathcal{H}$ において次は同値である．(1) E_x($\mathcal{H}$ より $\{\mathfrak{N}x\}^-$ への射影) が有限．(2) E_x' ($\mathcal{H}$ より $\{\mathfrak{N}'x\}^-$ への射影) が有限．(3) $y\in\{\mathfrak{N}x\}^-$ のとき，任意の $w\in\{\mathfrak{N}y\}^-$ に対して閉作用素 T が存在して $T\eta\mathfrak{N}$ かつ $w=Ty$．(4) $y\in\{\mathfrak{N}'x\}^-$ のとき，任意の $w\in\{\mathfrak{N}'y\}^-$ に対して閉作用素 T' が存在して，$T'\eta\mathfrak{N}'$ かつ $w=T'y$．(5) $y\in\{\mathfrak{N}'x\}^-$ のとき，$\mathrm{s}(\varphi)\leqq\mathrm{s}(\omega_y)$ である任意の $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，自己共役な正の作用素 T' が存在して $T'\eta\mathfrak{N}'$ かつ $\varphi=\omega_{T'y}$．(6) $y\in\{\mathfrak{N}x\}^-$ のとき，$\mathrm{s}(\varphi')\leqq\mathrm{s}(\omega'_y)$ である任意の $\varphi'\in\mathfrak{N}'_{*,+}$ に対して，自己共役な正の作用素 T が存在して $T\eta\mathfrak{N}$ かつ $\varphi'=\omega'_{Ty}$．(ただし，$\omega_y(A)=\langle y,Ay\rangle$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) で，$\omega_y'(A')=\langle y,A'y\rangle$ ($\forall A'\in\mathfrak{N}'$) で定められている．また，$\mathrm{s}(\varphi)$ は φ の台（付章 3.3 項）である．)

(II) さらに，$\mathfrak{N}$ を半有限な v. N. 代数，τ を忠実かつ半有限な正規トレースとする．このとき，任意の $\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$T=\dfrac{d\psi}{d\tau}\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ (ここで，$\|A\|_1=\tau(|A|)$ なるノルム $\|\cdot\|_1$ に関して〈定理 2.33〉の $\mathcal{J}$ を完備化したものが $L^1(\mathfrak{N},\tau)$) が一意に存在して，$\psi(A)=\tau(TA)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) と表せる

一般の v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ と任意の $\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ において $\psi\ll\varphi$ であれば，ある作用素 T が存在して $\psi(A)=\varphi(TA)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) とかけることが〈定理 2.22〉より容易に示せる．ただし，この T は $\mathfrak{N}=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ でなければ一意ではない．なおこの結果は後述する〈定理 4.15〉の原形になっている．以下任意の $Q\in\mathfrak{N}$ と $A\in\mathfrak{N}$ に対して，(i) $(l_Q\varphi)(A)=\varphi(QA)$，(ii) $(r_Q\varphi)(A)=\varphi(AQ)$，(iii) $(t_Q\varphi)(A)=\varphi(Q^*AQ)$ と l_Q,r_Q,t_Q を定める．これらの記法と，$\mathfrak{N}$の単位球 $\mathfrak{N}_1$ の端点 V は半等距離作用素（すなわち，V^*V が射影）であることを使うと，

〈定理 4.5〉 **極分解定理**：$\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対して；$|\varphi|\in\mathfrak{N}_{*,+}$ と半等距離作用素 $V\in\mathfrak{N}$ が一意に存在して $\varphi=r_V|\varphi|$ かつ $V^*V=\mathrm{s}(\varphi)$.

〈定理 4.6〉 **Jordan 分解定理**：$\varphi=\varphi^*\in\mathfrak{N}_*$ (ここで $\varphi^*(A)\equiv\overline{\varphi(A^*)}$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$)) に対して，$\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が一意に存在して $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ かつ $\mathrm{s}(\varphi_1)\mathrm{s}(\varphi_2)=0$.

$l_Q\varphi\geqq0$ ならば $l_Q\varphi\leqq\|Q\|\varphi$ であることが容易に示せ，これを使って Sakai [S 1] は次の定理を証明した．

〈定理 4.7〉 $\varphi, \psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$, $\psi \leqq \varphi$ のとき；（1） $T \in \mathfrak{N}$ が一意に存在して $0 \leqq T \leqq I$, $s(T) \leqq s(\varphi)$ および $\psi = t_T \varphi$；（2） $T \in \mathfrak{N}$ が存在して（φ が忠実なら一意），$0 \leqq T \leqq I$ かつ $\psi = \frac{1}{2}(l_T \varphi + r_T \varphi)$.

R. N. 定理は状態の分類に有用である．$I(\alpha)$ を * 自己同型群 $\alpha(G)$ に関して不変な正の線形汎函数の全体 (i. e., $I(\alpha) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{N}_{*,+}$；$\varphi \circ \alpha_g = \varphi, g \in G\}$) とし，$\mathfrak{N}_\varphi$ を集合 $\{A \in \mathfrak{N}$；$\sigma_t{}^\varphi(A) = A\}$ とする．ここで $\sigma_t{}^\varphi$ はモジュラー自己同型写像（付章 3.2 項）である．この $\mathfrak{N}_\varphi$ は $\{A \in \mathfrak{N}$；$\varphi(AQ) = \varphi(QA)$, $Q \in \mathfrak{N}\}$ に等しい．

〈定理 4.8〉 $\varphi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ が忠実であるとき；（1） $\psi \leqq \varphi$ である $\psi \in I(\sigma^\varphi)$ に対して $T \in \mathfrak{N}_\varphi$ が一意に存在して，$0 \leqq T \leqq I$ かつ $\psi = l_T \varphi (= r_T \varphi)$；（2） 忠実な $\psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ に対して $\sigma_t{}^\varphi = \sigma_t{}^\psi$ ならば正の自己共役作用素 $T \eta \mathcal{Z} \equiv \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$ が一意に存在してかつ $\psi = l_T \varphi$.

〈補題 4.9〉 忠実な $\varphi \in \mathfrak{N}_{*,+}$と$\alpha \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{N}$ に対して；（1） $\sigma_t{}^{\varphi\circ\alpha} = \alpha^{-1} \circ \sigma_t{}^\varphi \circ \alpha$；（2） $[\alpha, \sigma_t{}^\varphi] = 0$, $\forall t \in \boldsymbol{R}$ かつ $\alpha(A) = A$, $\forall A \in \mathcal{Z}$ であるとき $\varphi \circ \alpha = \varphi$.

〈定理 4.10〉 忠実な $\varphi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ に対して次は同値.（1） $\psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ が $\psi \circ \sigma_t{}^\varphi = \psi$.（2） 正の自己共役作用素 $T \eta \mathfrak{N}_\varphi$ が一意に存在して $\psi = l_T \varphi$. さらに，ψ も忠実ならば上の（1），（2）は次の（3），（4），（5）とも同値.（3） $\varphi \circ \sigma_t{}^\psi = \varphi$.（4） $[\sigma_t{}^\varphi, \sigma_t{}^\psi] = 0$.（5） 正の自己共役作用素 $S \eta \mathfrak{N}_\psi$ が一意に存在して $\varphi = l_S \psi$.

$\psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ が $(-1, \sigma_t{}^\varphi)$-KMS であれば，$s(\psi) \in \mathcal{Z}$ となるから，$s(\psi)\mathfrak{N}$ 上で ψ が忠実になる．このことを考慮すれば〈定理 4.8〉より $T \eta \mathcal{Z}$ が存在して $\psi = l_T \varphi$ と書けることがわかる．

v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ の元を要素とする 2×2 行列によって生成される v. N. 代数 $\mathcal{R}$ を $\mathfrak{N} \otimes M_2$ と書く．すなわち $A \in \mathfrak{N} \otimes M_2$ は

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathfrak{N}$$

と書ける．忠実な $\varphi, \psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$\mathcal{R}$ 上で $\omega(A) = \varphi(A_{11}) + \psi(A_{22})$ とおくと，ω は忠実で $\omega \in \mathcal{R}_{*,+}$ となる．$\sigma_t{}^\omega$ の一意性より，

$$\sigma_t{}^\omega\left(\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_t{}^\varphi(Q) & 0 \\ 0 & \sigma_t{}^\psi(S) \end{pmatrix}$$

と表せる．このことより Conne [C3] は次の定理を示した．

〈定理 4.11〉 忠実な $\varphi, \psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，強連続な写像 $u : t \in \boldsymbol{R} \to u_t \in \mathfrak{N}$ が一意に存在して次の条件を満たす：（1） u_t はユニタリー；（2） $\sigma_t{}^\psi(A) = u_t \sigma_t{}^\varphi u_t^*$, $\forall A \in \mathfrak{N}$, $\forall t \in \boldsymbol{R}$；（3） $u_t \sigma_t{}^\varphi(u_s) = u_{t+s}$, $\forall t, s \in \boldsymbol{R}$；（4） 任意の $A \in \mathfrak{N}$ に対して，$0 <$

$\mathrm{Im}\, z<1$ で解析的かつ $0\leqq \mathrm{Im}\, z\leqq 1$ で連続な有界複素函数 $F_A(z)$ が存在して，$F_A(t)=\phi(u_t A)$，$F_A(t+i)=\varphi(Au_t)$ を満たす．

註 1　この定理の条件の下で $\{u_t\,;\, t\ni \boldsymbol{R}\}$ が一径数群になるための必要かつ十分条件は〈定理 4.10〉の同値条件の 1 つが満たされることである．このとき，$\phi=l_T\varphi$ の R. N. D. T を使うと $u_t=T^{it}$ と表せる．

註 2　なお，この u_t は $u_t=(D\phi\,;\,D\varphi)_t$ と書かれ，**Connes の R. N. D.** とよばれている．さらに任意の忠実な $\varphi,\phi,\omega\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，（i）$(D\phi\,;\,D\varphi)_t=(D\varphi\,;\,D\phi)_t{}^{-1}$，（ii）$(D\omega\,;\,D\varphi)_t=(D\omega\,;\,D\phi)_t(D\phi\,;\,D\varphi)_t$ が満たされる，

$\mathfrak{N}$ の型に関する次の定理は重要である．

〈定理 4.12〉　忠実な $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$\sigma_t{}^\varphi$ が内部自己同型（すなわち，ユニタリー群 $\Gamma_t\in\mathfrak{N}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ が存在して $\sigma_t{}^\varphi(A)=\Gamma_t A\Gamma_t{}^*$）であることと $\mathfrak{N}$ が半有限であることとは同値．

〈定理 4.13〉　C* 力学系 $(\mathcal{A},\mathfrak{S},\alpha(\boldsymbol{R}))$ に対して $\varphi\in K_{\beta_1}(\alpha)$，$\phi\in K_{\beta_2}(\alpha)$ $(\beta_1\neq\beta_2)$ とする．このとき $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ および $\pi_\phi(\mathcal{A})''$ がIII型ならば表現 $\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi\}$ と $\{\mathcal{H}_\phi,\pi_\phi\}$ は互いに素である（すなわち，π_φ のいかなる部分表現も π_ϕ の部分表現とユニタリー同値ではない．あるいは $((\pi_\varphi\oplus\pi_\phi)(\mathcal{A}))''=\pi_\varphi(\mathcal{A})''\oplus\pi_\phi(\mathcal{A})''$）．

σ-有限な v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ のある巡回かつ分離ベクトル x に対して，正錐 $\mathcal{K}_x{}^\alpha(0\leqq\alpha\leqq 1/2)$ を $\mathcal{K}_x{}^\alpha=\{\Delta_x{}^\alpha\mathfrak{N}_+x\}^-$ と定める．とくに，$\alpha=\dfrac{1}{4}$ のとき $\mathcal{K}_x{}^{1/4}$ は付章 3.3 項で導入した正錐 $\mathcal{K}$ に等しい．このとき，$J_x\mathcal{K}_x{}^\alpha=\mathcal{K}_x{}^{(1/2)-\alpha}$，$\Delta_x{}^\alpha\mathfrak{N}_+x=(\Delta_x{}^{-1})^{(1/2)-\alpha}\mathfrak{N}_+{}'x$ が満たされる．また，Araki は次の定理を証明した［A 6］．

〈定理 4.14〉　（1）$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{1}{4}$ で，$\omega_y\leqq\omega_x$，$y\in\mathcal{K}_x{}^\alpha$ のとき $T^\alpha\in\mathfrak{N}$ が存在して，$y=T^\alpha x$ かつ $\|T^\alpha\|\leqq 1$；（2）$\phi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が $\phi\leqq\omega_x$ を満たすとき，$y\in K_x{}^\alpha$ が存在して $\phi=\omega_y$.

（1）と（2）を合わせると，$\phi\leqq\varphi$ なる $\varphi,\phi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して $0\leqq\alpha\leqq\dfrac{1}{4}$ ならば $T\equiv T_\varphi{}^\alpha(\phi)\in\mathfrak{N}$が存在して，$\gamma_\varphi{}^\alpha(\phi)=T\gamma(\varphi)$（この γ は付章 3.3 項で定めた $\mathfrak{N}_{*,+}$ から $\mathcal{K}_x{}^{1/4}$ への位相同型写像）とおくと，$\mathrm{s}(T^*T)\leqq\mathrm{s}(\varphi)$ かつ $\phi(A)=\langle\gamma_\varphi{}^\alpha(\phi),\,A\gamma_\varphi{}^\alpha(\phi)\rangle(\forall A\in\mathfrak{N})$ となる．とくに．$\alpha=0$ のとき上の表現は〈定理 4.8〉に一致する．ところで，$\alpha=\dfrac{1}{4}$ のとき，$T_\varphi{}^{1/4}(\phi)=T(\phi|\varphi)$ とおくと $\varphi_1\leqq\varphi_2$，$\varphi_2\leqq\varphi_3$ である $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$T(\varphi_1|\varphi_2)T(\varphi_2|\varphi_3)=T(\varphi_1|\varphi_3)$，$T(\varphi|\varphi)=\mathrm{s}(\varphi)$ が満たされる．φ,ϕ がともに忠実であれば $T(\phi|\varphi)$ は $(D\phi\,;\,D\varphi)_{-i/2}$ に等しい．

さて，$\mathcal{K}_x{}^0$ は $\{Ax\,;\,A\eta\mathfrak{N},\ x\in\mathrm{dom}\,A\}$ に等しく，任意の $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，（1）$y\in\mathcal{K}_x{}^0$ が一意に存在して $\varphi=\omega_y$ と書ける．したがって（2）正の自己共役作用素 $T\eta\mathfrak{N}$

が存在して，$\varphi\in\omega_{Tx}$ と表せることがわかる．このことを使って次の定理が証明される[T 2].

〈定理 4.15〉 任意の $\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して $\psi\ll\varphi$ であれば；（1） 正の自己共役作用素 $T\eta\mathfrak{N}$ が存在して $s(T)\leqq s(\varphi)$ かつ $\psi=t_T\varphi$；さらに （2） $s(\varphi)$ が有限ならば（1）の T は一意.

この節の最後に Gudder [G 6] による＊代数 $\mathcal{A}(\ni I)$ に関する R. N. 型の定理を説明しておこう.

＊代数 $\mathcal{A}$ のある Hilbert空間 $\mathcal{H}$ 上への＊表現 π とは $\mathcal{A}$ から稠密な領域 $D(\pi)\subset\mathcal{H}$ 上の線形作用素の全体への写像であって次の条件を満たすものをいう．（i） $\pi(I)=I$,（ii） $\pi(\mathcal{A})D(\pi)\subset D(\pi)$,（iii） $\pi(AB)x=\pi(A)\pi(B)x$ $(\forall x\in D(\pi),\ \forall A,B\in\mathcal{A})$,（iv） $\pi(\alpha A+\beta B)=\alpha\pi(A)+\beta\pi(B)$ $(\forall\alpha,\beta\in\boldsymbol{C},\forall A,B\in\mathcal{A})$,（v） $\pi(A^*)\subset\pi(A)^*$ $(\forall A\in\mathcal{A})$.

$\mathcal{B}$ を有限個の $\mathcal{A}$ の元からなる集合とするとき，$D(\pi)$ 上の位相 τ とは $0\in D(\pi)$ の ε–近傍 $N(\varepsilon,\mathcal{B})\equiv\{x\in D(\pi)\,;\,\|x\|_{\mathcal{B}}\equiv\sum_{A\in\mathcal{B}}\|\pi(A)x\|<\varepsilon\}$ によって生成される位相のことである．この位相 τ で，$\overline{D(\pi)}^{\tau}=D(\pi)$ のとき，π は閉であるという．$\{\pi(A)x_0\,;\,A\in\mathcal{A}\}^{-\tau}=D(\pi)$ となるベクトル x_0 が存在するとき，π は**強巡回的**であるといい，この x_0 を**強巡回ベクトル**という．さらに，$\pi(\mathcal{A})$ の非有界可換子 $\pi(\mathcal{A})^c$ とは $\langle x,Q\pi(A)y\rangle=\langle\pi(A^*)x,\,Qy\rangle$ $(\forall x,\ y\in D(\pi),\ \forall A\in\mathcal{A})$ を満たす線形作用素 $Q:D(\pi)\to\mathcal{H}$ の全体であり，$\pi(\mathcal{A})$ の可換子 $\pi(\mathcal{A})'$ は集合 $\{Q\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\,;\,T\upharpoonright D(\pi)\in\pi(\mathcal{A})^c\}$ である.

〔**定義 4.1**〕 ψ,φ を $\mathcal{A}$ 上の正の線形汎函数とする (i. e., $\varphi(A^*A)\geqq 0,\ \forall A\in\mathcal{A}$). このとき，

（1） 点列 $\{A_n\}\subset\mathcal{A}$ が (φ,ψ)–列である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\lim_{n\to\infty}\varphi(A^*{}_nA_n)=0,\ \lim_{n,m\to\infty}\psi((A_m-A_n)^*(A_m-A_n))=0$.

（2） $\psi\leqq\psi\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\psi(A^*A)\leqq\varphi(A^*A),\ \forall A\in\mathcal{A}$.

（3） ψ が**強 φ–絶対連続**（これを $\psi\lll\varphi$ と書く）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の (ψ,φ)–列 $\{A_n\}$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\psi(A_n{}^*A_n)=0$.

（4） ψ が **φ–絶対連続**（$\psi\ll\varphi$，これは C^* 代数の場合と同じ）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある $A\in\mathcal{A}$ に対して $\varphi(A^*A)=0$ ならば $\psi(A^*A)=0$.

上の定義より（2）⇨（3）⇨（4）は明らか.

＊代数 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$ 上の正の線形汎函数 φ に関しても GNS 構成定理が適用できて，閉＊表現 π_φ, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\varphi$, 強巡回ベクトル x_φ がユニタリー同値性を除いて一意に存在し，$\varphi(A)=\langle x_\varphi,\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$ と表せる.

この準備の下で Gudder は次の R. N. 型定理を証明した.

〈定理 4.16〉 $*$代数 $\mathcal{A}$ 上の正の線形汎函数 φ,ψ に対して，$\mathcal{H}_\varphi$ 上の正の自己共役作用素 T と (φ,ψ)-列 $\{A_n\}\subset\mathcal{A}$ が存在して；$\psi(A)=\langle Tx_\varphi,\ T\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle+\lim_{n\to\infty}\psi(A_n{}^*A_n)$ が任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して成立する．さらに；（1） $\psi\ll\varphi\Longleftrightarrow\varphi(A^*A)=0$ なる $A\in\mathcal{A}$ に対して，$\psi(A_n{}^*A^*A)=0,\ \forall n$；（2） $\psi\lll\varphi\Longleftrightarrow\psi(A)=\langle Tx_\varphi,\ T\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$ かつ $\langle Ty,\ T\pi_\varphi(A)x\rangle=\langle T\pi_\varphi(A^*)y,\ Tx\rangle,\ \forall A\in\mathcal{A},\ \forall x,y\in\pi_\varphi(\mathcal{A})x_\varphi$；（3） $\psi\leqq\varphi\Longleftrightarrow\psi(A)=\langle Tx_\varphi,\ T\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle,\ \forall A\in\mathcal{A}$ かつ $T^2\in\pi_\varphi(\mathcal{A})'$.

註 3 $\mathcal{A}$ が Banach $*$代数のときは上記の定理において，$T\eta\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ ととれる

4.3 条件付期待値

第1章の 1.2 節で復習した測度論的確率論（CPT）における条件付期待値は，σ-集合体 $\mathcal{F}$ 上の L^1-函数から $\mathcal{F}$ の σ-部分集合体 $\mathcal{G}$ 上の L^1-函数への射影であった．この条件付期待値は量子論的確率論（QPT）においてはどのように定式化されるであろうか？

付章 4.1 項の議論に従って QPT での確率空間は $(\mathcal{H},\mathfrak{N},\mathcal{P},\varphi)$ で記述する．いま，$\mathfrak{M}$ を v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数とするとき，$\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{M}$ への条件付期待値 $\mathcal{E}$ が存在したとすれば，この写像 $\mathcal{E}$ は線形であり，次の（1）～（8）の条件を満たしていてほしい．すなわち，任意の $A,A_\alpha\in\mathfrak{N},\ B,B_1,B_2\in\mathfrak{M}$ に対して，（1） $\mathcal{E}(B)=B$,（2） $\mathcal{E}(A^*)=\mathcal{E}(A)^*$,（3） $\|\mathcal{E}(A)\|\leqq\|A\|$,（4） $\mathcal{E}(A^*A)\geqq0$,（5） $\mathcal{E}(A^*A)=0\Longleftrightarrow A=0$,（6） $\mathcal{E}(B_1\mathcal{E}(A)B_2)=B_1\mathcal{E}(A)B_2$,（7） $\mathcal{E}(A)^*\mathcal{E}(A)\leqq\mathcal{E}(A^*A)$,（8） $A_\alpha\uparrow A$ であれば $\mathcal{E}(A_\alpha)\uparrow\mathcal{E}(A)$．さらに CPT からの対比から $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ は測度に相当するから，この φ に関して，（9） $\varphi(\mathcal{E}(A))=\varphi(A)$ であることが望ましい．これらの条件を満たす線形写像 $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{N}$ から$\mathfrak{M}$への**条件付期待値**という．この $\mathcal{E}$ は一般に $\varphi,\mathfrak{M}$ のとり方と係わりがあるので $(\varphi,\mathfrak{M})$-**条件付期待値**といい，$\mathcal{E}$ を $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ と書くことが多い．

そこで，まず第1の問題はこの条件付期待値が存在するかどうかであり，存在する場合，それは CPT において果たしたと同じような重要な役割を QPT においても果たすかどうかが第2の問題となる．この種の問題は 1954 年以降 Umegaki によって提起され組織的に調べられた．以後様々な研究者によって様々な角度から研究されてきている．この節では第1の問題に限るが，第2の問題は次の節以降，および，本論の第9章の 9.4 節で議論されている．

Umegaki は $\mathfrak{N}$ が σ-有限かつ有限（または半有限）であるとき，任意の v.N. 代数 $\mathfrak{M}$ への条件付期待値が常に存在することを示した [U 4]．この定理を述べる前に L^1 および L^2 空間を導入しておこう．

τ を $\mathfrak{N}$ の忠実な正規トレースとし，$\langle A,B\rangle=\tau(A^*B)$ $(\forall A,B\in\mathfrak{N})$ と $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を定義すると，これは $\mathfrak{N}$ の内積になる．この内積に関して $\mathfrak{N}$ を完備化したものを $L^2(\mathfrak{N},\tau)$ で表す．さらに，$\|A\|_1=\tau(|A|)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ とおくと，この $\|\cdot\|_1$ は $\mathfrak{N}$ 上のノルムを与え，

このノルムに関して $\mathfrak{N}$ を完備化したものを $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ で表す．このとき $\|A\|_1\leqq\|A\|_2\leqq\|A\|$（ただし $\|A\|_2=\langle A, A\rangle^{1/2}$）が容易にわかり，したがって，$\mathfrak{N}\subset L^2(\mathfrak{N},\tau)\subset L^1(\mathfrak{N},\tau)$ である．

註　$L^1(\mathfrak{N},\tau)$ は Segal [S 5] の意味での τ に関する必ずしも有界でない**可積分作用素**の全体である．なお，$L^1(\mathfrak{N},\tau)\subset\{A\,;\,A\eta\mathfrak{N}\}$.

〈定理 4.17〉　上記の $\mathfrak{N},\tau$ において，$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{N}$ の任意の v. N. 部分代数とするとき，$(\tau,\mathfrak{M})$-条件付期待値が一意に存在する．

略証　$A\in\mathfrak{N}_+$ に対して $\tau_A(B)=\tau(AB)$ $(\forall B\in\mathfrak{M})$ とおくと，$|\tau_A(B)|\leqq\|A\|\tau(|B|)$. したがって，R. N. 定理より，$\tilde{A}\in\mathfrak{M}$ が一意に存在して，$\tau_A(B)=\tau(\tilde{A}B)$. この $\tilde{A}$ を $\mathcal{E}(A)$ とおく．任意の元 $A\in\mathfrak{N}$ は $A=A_1-A_2+i(A_3-A_1)$ $(A_k\in\mathfrak{N}_+)$ と表せるので $\mathcal{E}$ は $\mathfrak{N}$ 上に拡張でき，$\tau(\mathcal{E}(A)B)=\tau(AB)$ が満たされる．この写像 $A\in\mathfrak{N}\to\mathcal{E}(A)\in\mathfrak{M}$ は前述の条件（1）～（8）を満たすことも示せる．たとえば，$\mathcal{E}(A^*A)\geqq0$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ は明らかだから，このことより（7）が次のようにして示せる．

$\mathcal{E}\{(A-\mathcal{E}(A))^*(A-\mathcal{E}(A))\}=\mathcal{E}(A^*A)-\mathcal{E}(A^*)\mathcal{E}(A)\geqq0.$ ▌

〈定理 4.18〉　〈定理 4.17〉における条件付期待値 $\mathcal{E}$ は $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ から $L^1(\mathfrak{M},\tau)$ への（1）～（8）を満たす射影 $\mathcal{E}_1$ に一意に拡張でき，$\tau(\mathcal{E}_1(Q)B)=\tau(QB)$ $(\forall Q\in L^1(\mathfrak{N}), \forall B\in\mathfrak{M})$，$\mathcal{E}_1|\mathfrak{N}=\mathcal{E}$ が成立する．

〈略証〉　任意の $Q\in L^1(\mathfrak{N})$ に対して，$\{A_n\}\subset\mathfrak{N}$ が存在して，$\|A_n-Q\|_1\to0$ また，$A\in\mathfrak{N}$ において $\|\mathcal{E}(A)\|_1\leqq\|A\|_1$ が成立するので，$\{\mathcal{E}(A_n)\}$ はコーシー列となり $\tilde{Q}\in L^1(\mathfrak{M},\tau)$ が存在して，$\tau(\tilde{Q}B)=\tau(QB)$ $(\forall B\in\mathfrak{M})$. この $\tilde{Q}$ を $\mathcal{E}_1(Q)$ とおけばよい．これは当然 $\mathcal{E}_1(S)=S$ $(\forall S\in L^1(\mathfrak{M}))$ を満たす．▌

註　$L^2(\mathfrak{N},\tau)$ から $L^2(\mathfrak{M},\tau)$ へのノルムが1の射影は通常の射影作用素である．これの $\mathfrak{N}$ への制限は〈定理 4.17〉における $\mathcal{E}$ に等しい．

Tomiyama [T 8] は C* 代数におけるノルムが1の射影が性質（4），（6），（7）をもつことを示した．

〈定理 4.19〉　C* 代数 $\mathcal{A}$ とその C* 部分代数 $\mathcal{B}$ において，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へのノルムが1の射影 $\mathcal{E}$ (i. e., $\mathcal{E}(B)=B$, $\forall B\in\mathcal{B}$, $\|\mathcal{E}(A)\|\leqq\|A\|$, $\forall A\in\mathcal{A}$) は条件付期待値の性質（4），（6），（7）を満たす．

Takesaki [T 3] は一般の v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ と忠実な $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，条件付期待値が存在する必要十分条件を与えた．

〈定理 4.20〉　$\mathfrak{N}$ の v. N. 部分代数を $\mathfrak{M}$ とするとき，忠実な $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，次の条件は同値である．（1）　$(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値が一意に存在する．（2）　$\sigma_t^{\varphi}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$,

$\forall t\in\boldsymbol{R}$.

略証 (2)⇨(1)：$\varphi(A)=\langle x, Ax\rangle$, $\mathcal{S}=\mathfrak{M}x$, $\mathcal{K}=\overline{\mathcal{S}}$ とおくと，$\mathcal{H}=\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}^{\perp}$ とかけて，x は $\mathfrak{M}_{\mathcal{K}}\equiv\mathfrak{M}\upharpoonright\mathcal{K}$ に関する巡回かつ分離ベクトルになる．$\sigma_t^{\varphi}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ より $\Delta^{it}\mathcal{S}=\mathcal{S}$. ゆえに $\hat{\varphi}=\varphi\upharpoonright\mathfrak{M}$, $\Delta_{\mathcal{K}}=\Delta\upharpoonright\mathcal{K}$ とおくと，$\sigma_t^{\hat{\varphi}}(\cdot)=\Delta_{\mathcal{K}}^{it}\cdot\Delta_{\mathcal{K}}^{-it}$. ここで $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への射影を E とすると，$E\in\mathfrak{M}'$ で $EAx\in\mathcal{S}$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$. さらに，$\mathcal{E}(A)x=EAx$ とおくと $\mathcal{E}$ は $(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値になる．

(1)⇨(2)：上記のように $E,\mathcal{E}$ を定めると，$\Delta^{it}=(I-2E)\Delta^{it}(I-2E)$ がわかり，$\Delta^{it}\mathfrak{M}x\subset\mathfrak{M}x$ が証明される．ゆえに，$\sigma_t^{\varphi}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$. ∎

註 $\mathfrak{N}$ が有限 v. N. 代数で $\varphi=\tau$ のときは，σ_t^{τ} は恒等写像となるから，任意の $\mathfrak{M}$ に対して $\sigma_t^{\tau}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$.

この定理から条件付期待値は常に存在するとは限らないことがわかる．そのため，Gudder と Marchard [G 9] および Accardi と Cecchini [A 1] は条件付期待値に代わるある写像を考えた．

以下 $\mathfrak{N}$ を v. N. 代数，$\mathfrak{M}$ をその v. N. 部分代数とする．忠実な $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$\langle A, B\rangle=\varphi(A^*B)$ は $\mathfrak{N}$ 上の内積を定め，これに関して $\mathfrak{N}$ を完備化した空間 $L^2(\mathfrak{N},\varphi)$ は Hilbert 空間になる．同様にこの内積に関して $\mathfrak{M}$ を完備化した空間 $L^2(\mathfrak{M},\varphi)$ は $L^2(\mathfrak{N},\varphi)$ の閉部分空間である．よって $L^2(\mathfrak{N},\varphi)$ から $L^2(\mathfrak{M},\varphi)$ への射影 P が一意に存在する．ところで，$L^2(\mathfrak{N},\varphi)$ 上の有界線形作用素 $\pi(A)\in\boldsymbol{B}(L^2(\mathfrak{N},\varphi))$ を $\pi(A)B=AB$ $(\forall B\in\mathfrak{N})$ と定めると，これは GNS 表現である．Gudder と Marchard は写像を $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\boldsymbol{B}(L^2(\mathfrak{N},\varphi))$ で，(i) $\mathcal{E}(A)L^2(\mathfrak{M},\varphi)\subset L^2(\mathfrak{M},\varphi)$，(ii) $\mathcal{E}(A)^*L^2(\mathfrak{M},\varphi)\subset L^2(\mathfrak{M},\varphi)$，(iii) $\langle B_1, \mathcal{E}(A)B_2\rangle=\langle B_1, \pi(A)B_2\rangle$ $(\forall B_1, B_2\in L^2(\mathfrak{M},\varphi)$ または $L^2(\mathfrak{M},\varphi)^{\perp})$ を満たすものが $\mathcal{E}(A)=P\pi(A)P+(I-P)\pi(A)(I-P)$ と一意に決まることを示した．さらにこの $\mathcal{E}$ は条件付期待値と似た次の性質を有している．

〈定理 4.21〉 上記の線形写像 $\mathcal{E}$ は次の性質を有する．任意の $A\in\mathfrak{N}$ と $B\in\mathfrak{M}$ に対して；(1) $\mathcal{E}(B)=\pi(B)$；(2) $\|\mathcal{E}(A)\|\leqq\|A\|$；(3) $\mathcal{E}(A^*)=\mathcal{E}(A)^*$；(4) $\mathcal{E}(A^*A)\geqq 0$；(5) $\mathcal{E}(A^*A)=0\Longleftrightarrow A=0$；(6) $\mathcal{E}(B_1AB_2)=\pi(B_1)\mathcal{E}(A)\pi(B_2)$, $\forall B_1, B_2\in\mathfrak{M}$；(7) $\mathcal{E}(A)^*\mathcal{E}(A)\leqq\mathcal{E}(A^*A)$；(8) $A_n\uparrow A$ ならば $\mathcal{E}(A_n)\uparrow\mathcal{E}(A)$.

最近，Accardi と Cecchini は忠実な $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に関して，$\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{M}$ への写像 $\mathcal{E}$ で $\varphi\circ\mathcal{E}=\varphi$ を満たすものが常に存在することを示した．

$\mathcal{A},\mathcal{B}$ をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H},\mathcal{K}$ 上の σ-有限な v. N. 代数，$x\in\mathcal{H}$, $y\in\mathcal{K}$ を巡回かつ分離ベクトルとし，$\varphi(A)=\langle x, Ax\rangle$ $(\forall A\in\mathcal{A})$, $\psi(B)=\langle y, By\rangle$ $(\forall B\in\mathcal{B})$ とおく．このとき

〈定理 4.22〉 写像 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が完全正写像（次節を参照）であり，$\psi\circ F=\varphi$ であるとき，$\mathcal{B}'$ から $\mathcal{A}'$ への完全正写像 F' が“一意”に存在して，$\langle B'y, F(A)y\rangle=\langle F'(B')x,$

$Ax\rangle(\forall B'\in\mathcal{B}',\ \forall A\in\mathcal{A})$ かつ $\varphi'\circ F'=\psi'$（ここで $\varphi'(A')\equiv\langle x, A'x\rangle,\ \forall A'\in\mathcal{A}'$. ψ' も同様）を満たす．さらに，Fが正規（i. e., $A_n\uparrow A\Rightarrow F(A_n)\uparrow F(A)$）で $F(I_{\mathcal{A}})=I_{\mathcal{B}}$ ならば F' も正規で $F'(I_{\mathcal{B}})=I_{\mathcal{A}}$ となる．

さて，巡回かつ分離ベクトル $x\in\mathcal{H}$ により，$\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ を $\varphi(A)=\langle x, Ax\rangle$ と定め，$\mathcal{K}=\{\mathfrak{M}x\}^-$ とおく．写像 $i:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ をうめ込み（i. e., $i(A)=A,\ \forall A\in\mathfrak{M}$）とし，$\tilde{i}=j_{\mathfrak{N}}\circ i\circ j_{\mathfrak{N}}^{-1}=j_{\mathfrak{N}}\circ j_{\mathfrak{N}}^{-1}$とすると，(ここで $j_{\mathfrak{N}}$ は $\mathfrak{N}$ と x に関するモジュラー共役作用素 $J_{\mathfrak{N}}$ を使って $j_{\mathfrak{N}}(\cdot)=J_{\mathfrak{N}}\cdot J_{\mathfrak{N}}$ と表せる $\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{N}'$ への＊同型写像）$\tilde{i}$ は $\mathfrak{M}'$ から $\mathfrak{N}'$ への正規な完全な正写像で，$\tilde{i}(I)=I$，かつ $\varphi'\circ\tilde{i}=\varphi'$．したがって上の〈定理 4.22〉より正規完全正写像 $\mathcal{E}$ が存在して，$\mathcal{E}(I)=I$，$\langle\tilde{i}(B')x,\ Ax\rangle=\langle B'y,\ \mathcal{E}(A)y\rangle$ $(\forall B'\in\mathfrak{M}')$ かつ $\varphi\circ\mathcal{E}=\varphi$ となる．一般に $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が完全正写像で $F(I_{\mathcal{A}})=I_{\mathcal{B}}$ であれば，縮約写像 $V^*:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ が一意に存在して，$V^*Ax=F(A)y$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ となることが知られている．よって，この $\mathcal{E}$ に対しても縮約写像 $V^*:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ が一意に存在して，
（i） $VB'x=\tilde{i}(B')x$ $(\forall B'\in\mathfrak{M}')$，　（ii） $V^*V=P_{\mathfrak{M}}$（$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への射影）で，(iii) $\mathcal{E}(A)=V^*AV$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ を満たすことが示せる．なお，（i）は （iv） $V=J_{\mathfrak{N}}J_{\mathfrak{M}}P_{\mathfrak{M}}$ と同値である．以上まとめると，

〈定理 4.23〉 $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が忠実であるとき，任意の v. N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ に対して，$\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{M}$ への忠実な正規完全正写像 $\mathcal{E}$ が一意に存在して，次の条件を満たす；（1） $\varphi\circ\mathcal{E}=\varphi$；（2） $V=J_{\mathfrak{N}}J_{\mathfrak{M}}P_{\mathfrak{M}}$ とおくと $\mathcal{E}(\cdot)=V^*\cdot V$，さらに；（3） $\mathfrak{N}x$ 上で $\Delta_{\mathfrak{M}}^{-1/2}P_{\mathfrak{M}}\Delta_{\mathfrak{N}}^{1/2}=V^*$；（4） $\mathfrak{M}'x$ 上で $\Delta_{\mathfrak{N}}^{1/2}\Delta_{\mathfrak{M}}^{-1/2}P_{\mathfrak{M}}=V$.

この $\mathcal{E}$ は，$\sigma_t^{\varphi}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ が成立する場合は，通常の $(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値に一致することも示される．しかし，$\mathcal{E}$ が $(\mathfrak{M},\varphi)$-条件付期待値でなければ，$\mathcal{E}(\mathfrak{N})\subsetneq\mathfrak{M}$ であり，$\mathcal{E}$ は上への写像にもなっていない．この $\mathcal{E}$ を **φ-不変条件付写像**ということにする．

4.4 martingale 型の収束定理

Umegaki は条件付期待値の 1 つの応用として，CPT における martingale の収束定理（第 2 章の 2.1 節参照）を QPT の場合に拡張した．この節では Umegaki の結果と最近の Dang-Ngoc および Goldstein の結果を簡単に見ておくことにする．

σ-有限かつ有限な v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ とその上の忠実な正規トレース τ に関して，$\{\mathfrak{M}_\alpha\}$を $\mathfrak{N}$ の v. N. 部分代数の増大ネットとする．このときネット $\{Q_\alpha\}\subset L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が $\{\mathfrak{M}_\alpha\}$ と τ に関する **martingale** であるとは $\alpha_1\leqq\alpha_2$ のとき $Q_{\alpha_1}=E_\tau(Q_{\alpha_2}|\mathfrak{M}_{\alpha_1})$ となる場合をいう．さらに，$\mathcal{L}\subset L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が**一様可積分**であるとは；（i） $\mathcal{L}$が$\|\cdot\|_1$-有界であり，（ii） 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して $\tau(P)<\delta$ $(P\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}})$ ならば $|\tau(AP)|<\varepsilon$ $(\forall A\in\mathcal{L})$ を満たす場合である．このとき次の定理が証明される [U 5].

〈定理 4.24〉 ネット $\{Q_\alpha\}$ が上記の $\{\mathfrak{M}_\alpha,\tau\}$ に関して martingale であるとき，次は

同値である．（1） $\{Q_\alpha\}$ は一様可積分．（2） $\{Q_\alpha\}$ は $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ において相対弱コンパクト．（3） $\{Q_\alpha\}$ は L^1-単純（すなわち，$Q\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が存在して $Q_\alpha=E_\tau(Q|\mathfrak{M}_\alpha)$ と表せる）．（4） $Q\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が存在して $\|Q_\alpha-Q\|\to 0$．さらに，$\{Q_\alpha\}\subset L^2(\mathfrak{N},\tau)$ (resp. $\mathfrak{N}$) であれば，次も同値である．(1′) $\{Q_\alpha\}$ は $\|\cdot\|_2$-有界 (resp. $\|\cdot\|$-有界)．(2′) $\{Q_\alpha\}$ は L^2-単純 (resp. $\mathfrak{N}$-単純)．(3′) $Q\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$ (resp. $\mathfrak{N}$) が存在して $\|Q_\alpha-Q\|_2\to 0$ (resp. $Q_\alpha\xrightarrow{s}Q$)．

ところで，$\{\mathfrak{M}_\alpha\}$ が減少ネットである場合は次の定理が成立する [U 9]．

〈定理 4.25〉 $\mathfrak{M}_\alpha\downarrow\mathfrak{M}$ とおくと次の事が成立する；（1） 任意の $Q\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$ に対して $\|E_\tau(Q|\mathfrak{M}_\alpha)-E_\tau(Q|\mathfrak{M})\|_2\to 0$；（2） 任意の $Q\in\mathfrak{N}$ に対して $E_\tau(Q|\mathfrak{M}_\alpha)\xrightarrow{s}E_\tau(Q|\mathfrak{M})$；（3） 任意の $Q\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ に対して，$\|E_\tau(Q|\mathfrak{M}_\alpha)-E_\tau(Q|\mathfrak{M})\|_1\to 0$．

Dang-Ngoc [D 1] は CPT の場合とほとんど変わらない簡単な計算によって Umegaki の結果を一般の v. N. 代数の場合に拡張した．$\mathfrak{N}$ を σ-有界な v. N. 代数，φ を忠実な状態とする．点列 $\{A_n\}\subset\mathfrak{N}$ が $A\in\mathfrak{N}$ に φ に関して**ほとんど一様**（φ-a. u. と略す）**に収束**するとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して $P\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$ が存在して，$\varphi(I-P)<\varepsilon$ かつ $\|(A_n-A)P\|\to 0$ となる場合をいう．この φ-a. u. 収束は $\mathfrak{N}=L^\infty(X,\mu)$ である CPT の場合には，μ-a. e. 収束に一致している．

〈定理 4.26〉 $\{\mathfrak{M}_n\}$ を $\mathfrak{N}$ の v. N. 部分代数の増大列で $\sigma_t{}^\varphi(\mathfrak{M}_n)=\mathfrak{M}_n$ とする．いま $\|\cdot\|$-有界な $\{A_n\}\subset\mathfrak{N}$ が $\{\mathfrak{M}_n,\varphi\}$ に関する martingale (i. e., $n\leqq m\Rightarrow A_n=E_\varphi(A_m|\mathfrak{N}_n)$) であれば，$A\in\mathfrak{N}$ が存在して；（1） $A_n\xrightarrow{s}A$；（2） $A_n\xrightarrow{\varphi\text{-a. u.}}A$；（3） $A_n=E_\varphi(A|\mathfrak{M}_n)$．

註 強収束に関しては点列でなくてもネットの場合で簡単に証明できる．とくに，$\sigma_t{}^\varphi(\mathfrak{M}_\alpha)=\mathfrak{M}_\alpha$ のとき，$\mathfrak{M}_\alpha\uparrow\mathfrak{M}$ あるいは $\mathfrak{M}_\alpha\downarrow\mathfrak{M}$ であれば $E_\varphi(A|\mathfrak{M}_\alpha)\xrightarrow{s}E_\varphi(A|\mathfrak{M})$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) が成立する．

さて，一般の v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ とその上の忠実な状態 φ に関しては，$\varphi(|A|)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) は $\mathfrak{N}$ 上のノルムにならないので有限な v. N. 代数とその上のトレース τ の場合と同様な方法では L^1 空間をつくることはできない．そこで，任意の $A,B\in\mathfrak{N}$ に対して $A\circ B=(AB+BA)/2$ とおき，$\|A\|_1=\sup\{|\varphi(Q\circ A)|\,;\,Q\in\mathfrak{N},\ \|Q\|\leqq 1\}$ と定めると，$\|\cdot\|_1$ は $\mathfrak{N}$ 上のノルムとなり，これにより $\mathfrak{N}$ を完備化したものを $L^1(\mathfrak{N},\varphi)$ で表す．このとき $L^1(\mathfrak{N},\varphi)$ は $\mathfrak{N}_*$ と $*$ 等距離同型であることがわかる．さらに，$\|A\|_2=\varphi(A^*\circ A)^{1/2}$ と $\|\cdot\|_2$ を定めると，これも $\mathfrak{N}$ 上のノルムとなり，これによる $\mathfrak{N}$ の完備化を $L^2(\mathfrak{N},\varphi)$ で表す．$\|A\|_1\leqq\|A\|_2$ となるので，$\mathfrak{N}\subset L^2(\mathfrak{N},\varphi)\subset L^1(\mathfrak{N},\varphi)$ と考えられる．また，$\sigma_t{}^\varphi(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ となる $\mathfrak{N}$ の v. N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ において，$\|E_\varphi(A|\mathfrak{M})\|_k\leqq\|A\|_k$ ($k=1,2$) であるので，E_φ は $L^k(\mathfrak{N},\varphi)$ から $L^k(\mathfrak{M},\varphi)$ へのノルムが 1 の射影に拡張できる．

$\mathcal{L}\subset L^1(\mathfrak{N},\varphi)$ が**一様可積分**であるとは，（i） $\mathcal{L}$ が $\|\cdot\|_1$-有界であり，（ii） 任意の

$\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$\varphi(P)<\delta$ ($P\in\mathcal{P}_{\mathfrak{N}}$) ならば $\varphi(P\circ|A|)<\varepsilon$ かつ $\varphi(P\circ|A^*|)<\varepsilon$ ($\forall A\in\mathcal{L}$) となる場合をいう．

これらの準備の下で Goldstein [G 2] は Umegaki の結果〈定理 4.24〉，〈定理 4.25〉を一般化した．

〈定理 4.27〉 ネット $\{Q_\alpha\}\subset L^1(\mathfrak{N},\varphi)$ が $\sigma_t^\varphi(\mathfrak{M}_\alpha)=\mathfrak{M}_\alpha$ である $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数の増大ネット $\{\mathfrak{M}_\alpha\}$ と φ に関して martingale である(i. e., $\alpha_1\leqq\alpha_2\Rightarrow Q_{\alpha_1}=E_\varphi(Q_{\alpha_2}|\mathfrak{M}_{\alpha_1})$) とき，次は同値である．(1) $\{Q_\alpha\}$ は一様可積分．(2) $\{Q_\alpha\}$ は $L^1(\mathfrak{N},\varphi)$ において相対弱コンパクト．(3) $\{Q_\alpha\}$ は L^1-単純 (i. e., $Q\in L^1(\mathfrak{N},\varphi)$ が存在して $Q_\alpha=E_\varphi(Q|\mathfrak{M}_\alpha)$)．(4) $Q\in L^1(\mathfrak{N},\varphi)$ が存在して，$\|Q_\alpha-Q\|_1\to0$．さらに $\{Q_\alpha\}\subset L^2(\mathfrak{N},\varphi)$ (resp. $\mathfrak{N}$) であれば次も同値である．(1′) $\{Q_\alpha\}$は$\|\cdot\|_2$-有界 (resp. $\|\cdot\|$-有界)．(2′) $\{Q_\alpha\}$ は L^2-単純 (resp. $\mathfrak{N}$-単純)．(3′) $Q\in L^2(\mathfrak{N},\varphi)$ (resp. $\mathfrak{N}$) が存在して $\|Q_\alpha-Q\|\to0$(resp. $Q_\alpha\xrightarrow{s}Q$)．

〈定理 4.28〉 $\mathfrak{M}_\alpha\downarrow\mathfrak{M}$ で $\sigma_t^\varphi(\mathfrak{M}_\alpha)=\mathfrak{M}_\alpha$ のときは，次が成立する；(1) 任意の $Q\in L^2(\mathfrak{N},\varphi)$ に対して，$\|E_\varphi(Q|\mathfrak{M}_\alpha)-E_\varphi(Q|\mathfrak{M})\|_2\to0$；(2) 任意の $Q\in\mathfrak{N}$ に対して，$E_\varphi(Q|\mathfrak{M}_\alpha)\xrightarrow{s}E(Q|\mathfrak{M})$；(3) 任意の $Q\in L^1(\mathfrak{N},\varphi)$ に対して，$\|E_\varphi(Q|\mathfrak{M}_\alpha)-E(Q|\mathfrak{M})\|_1\to0$.

なお，v.N. 部分代数のネット $\{\mathfrak{M}_\alpha\}$ が $\sigma_t^\varphi(\mathfrak{M}_\alpha)=\mathfrak{M}_\alpha$ でない場合，すなわち $(\varphi,\mathfrak{M}_\alpha)$-条件付期待値が存在しない場合でも前節でみた φ-不変条件付写像 $\mathcal{E}_\alpha:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}_\alpha$ は存在するが，この $\mathcal{E}_\alpha$ は〈定理 4.23〉より $V_\alpha=J_{\mathfrak{N}}J_{\mathfrak{M}_\alpha}P_{\mathfrak{M}_\alpha}$ を使って $\mathcal{E}_\alpha(\cdot)=V_\alpha^*\cdot V_\alpha$ と表せる．したがって，$\mathfrak{M}_\alpha\uparrow\mathfrak{M}$ のときは $J_{\mathfrak{M}_\alpha}\xrightarrow{s}J_{\mathfrak{M}}$[A 8] かつ $P_{\mathfrak{M}_\alpha}\xrightarrow{s}P_{\mathfrak{M}}$ であるから $\|\cdot\|$-有界な $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}$ が $\{\mathfrak{M}_\alpha,\varphi\}$ に関して martingale (i. e., $\alpha_1\leqq\alpha_2\Rightarrow\mathcal{E}_{\alpha_1}(A_{\alpha_2})=A_{\alpha_1}$) であれば，$A\in\mathfrak{N}$ が存在して，(1) $A_\alpha\xrightarrow{s}A$，(2) $A_\alpha=\mathcal{E}_\alpha(A)$ が成立することは〈定理 4.26〉および〈定理 4.27〉より明らかである．

4.5 完全正写像

ある C* 力学系 $(\mathcal{A},\mathfrak{S}(\mathcal{A}),\alpha)$ から他の C* 力学系 $(\mathcal{B},\mathfrak{S}(\mathcal{B}),\tau)$ への変換（写像）$\Lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の研究は，C* 力学系による記述が通常の測度論的記述を含むことからしても，物理学のみならず，様々な領域において基本的である．とくに，$\mathcal{A}$ の正の元を $\mathcal{B}$ の正の元に移す線形写像（これを線形正写像，または単に**正写像**という）が重要である．

ところで，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で記述されるある力学系と自由度 n の粒子からなる系を考える．このとき，合成系の Hilbert 空間は $\mathcal{H}\otimes\boldsymbol{C}^n$ であり，M_n を $\boldsymbol{C}^n$ 上の $n\times n$ 行列の全体とすると，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\boldsymbol{C}^n)\cong\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\otimes M_n$ となる．よって任意の $Q\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\otimes M_n$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の元 A_{ij} からなる $n\times n$ 行列 $Q=(A_{ij})$ であるから，Λ が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上で正写像であっても，$(A_{ij})\longmapsto(\Lambda(A_{ij}))$ が正写像になるとは限らない．

いま，C* 代数 $\mathcal{A}$ の元を要素とする $n\times n$ 行列の全体を $M_n(\mathcal{A})=\mathcal{A}\otimes M_n$ で表し，

$\mathcal{A}$ のある表現を $\{\mathcal{H},\pi\}$ とし，$\mathcal{H}_n$ を CONS $\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n\}$ をもつ n 次元 Hilbert 空間とする．そこで，$M_n(\mathcal{A})$ の表現 $\{\widetilde{\mathcal{H}},\tilde{\pi}\}$ を次のように定める．$\widetilde{\mathcal{H}}\equiv\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_n$，$\tilde{\pi}(\tilde{A})(x\otimes\xi_j)\equiv\sum_{j=1}^{n}\pi(A_{ij})x\otimes\xi_j$．ここで $x\in\mathcal{H}$，$\tilde{A}\equiv(A_{ij})\in M_n(\mathcal{A})$ である．このとき表現 $\tilde{\pi}$ は忠実であり，$\tilde{\pi}(M_n(\mathcal{A}))=\pi(\mathcal{A})\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_n)$ となる．さらに，$\max\{\|\pi(A_{ij})\|:1\leqq i,j\leqq n\}\leqq\|\tilde{\pi}(\tilde{A})\|\leqq\sum_{i,j=1}^{n}\|\pi(A_{ij})\|$ であるから $\tilde{\pi}(M_n(\mathcal{A}))$ は $\boldsymbol{B}(\widetilde{\mathcal{H}})$ において一様位相で閉じている．したがって，$M_n(\mathcal{A})$ はノルム $\|\tilde{A}\|=\|\tilde{\pi}(\tilde{A})\|$ に関して C* 代数となる．C* 代数のすべての忠実な表現は等長的であるから，$M_n(\mathcal{A})$ のノルムは π の選び方によらない．ところで，線形な正写像 $\Lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が **n-正**であるとは，任意の正の行列 $\tilde{A}=(A_{ij})\in M_n(\mathcal{A})$ に対して $\Lambda_n(\tilde{A})=(\Lambda(A_{ij}))\in M_n(\mathcal{A})$ （$\Lambda_n=\Lambda\otimes I_n$ と書く）も正の行列になる場合をいう． さらにすべての自然数 n に関して n-正である正写像 Λ を **完全正写像**という．以下 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への正写像の集合を $P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ で表し，完全正写像の集合を $\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ で表す．とくに，$\mathcal{A}=\mathcal{B}$ のときは，単に $P(\mathcal{A}),\mathrm{CP}(\mathcal{A})$ と書くことにする．

『$\tilde{A}=(A_{ij})\in M_n(\mathcal{A})_+$（正の行列の全体）$\Longleftrightarrow\tilde{A}$ は $(B_i{}^*B_j)$，$B_i,B_j\in\mathcal{A}$ の形の行列の和で表せる．$\Longleftrightarrow$ 任意の $Q_i\in\mathcal{A}$ $(i=1,\cdots,n)$ に対して $\sum_{i,j=1}^{n}Q_i{}^*A_{ij}Q_j\geqq0$』が容易にわかる．さらに

1° $\Lambda\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{B})\Longleftrightarrow\sum_{i,j=1}^{n}B_i{}^*\Lambda(A_i{}^*A_j)B_j\geq0,\ \forall A_i\in\mathcal{A},\ \forall B_i\in\mathcal{B},\ \forall n\in\boldsymbol{N}$.

2° $\mathcal{A}$ または $\mathcal{B}$ が可換なとき，$\Lambda\in P(\mathcal{A},\mathcal{B})\Longleftrightarrow\Lambda\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

2° より $\mathcal{A}$ 上の正の線形汎函数 $\varphi\in P(\mathcal{A},\boldsymbol{C})$ は完全正であることがわかる．また $\|A_n\|\to0$ となる $\{A_n\}\subset\mathcal{A}$ に対して $\Lambda\in P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ であれば $\|\Lambda(A_n)\|\to0$ が容易に示せる．したがって

3° $\Lambda\in P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ は連続である．

4° $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の C* 部分代数であり Λ が $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へのノルムが 1 の射影であれば $\Lambda\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Stinespring [S 12] は完全正写像に関する次の表現定理を証明した．

〈定理 4.29〉 $\mathcal{A}$ をある C* 代数，$\mathcal{H}$ をある Hilbert 空間とするとき，次が成立する；(1) $\mathcal{A}$ の表現を $\{\mathcal{L},\pi\}$, V を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への有界線形作用素とするとき，$\Lambda:A\in\mathcal{A}\to V^*\pi(A)V\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ は完全正写像；(2) $\Lambda\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ のとき，(1) の $\{\mathcal{L},\pi\}$, V および $\Lambda(\mathcal{A})'$ の $\mathcal{L}$ 上での正規表現 ρ が存在して，(i) $\Lambda(A)=V^*\pi(A)V$, $\forall A\in\mathcal{A}$, (ii) $\rho(Q)V=VQ$, $\forall Q\in\Lambda(\mathcal{A})'$, (iii) $\rho(\Lambda(\mathcal{A})')\subset\pi(\mathcal{A})'$, (iv) $\mathcal{L}=\{\pi(\mathcal{A})V\mathcal{H}\}^-$；(3) (2) の条件を満たす組 $(\pi,\mathcal{L},V,\rho)$ はユニタリー同値性を除いて一意である；(4) $I\in\mathcal{A}$ のとき，$\Lambda(I)=I$ ならば V は等長的であり，ρ は忠実である．

註 $\mathcal{A}$ が v. N. 代数で，Λ が正規 (i. e., $A_\alpha\uparrow A\Rightarrow\Lambda(A_\alpha)\uparrow\Lambda(A)$) であれば，表現 π も正規である．任意の C* 代数はある Hilbert 空間上の C* 代数とみなしてよい（〈定理 2.16〉）ことから，この定理により次の Schwarz 型の不等式が証明される [C 1, K 1].

〈定理 4.30〉 $\Lambda\in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{B})\Rightarrow\Lambda(A^*)\Lambda(A)\leqq\|\Lambda\|\Lambda(A^*A)$, $\forall A\in\mathcal{A}$. ($I\in\mathcal{A}$ であれば $\|\Lambda\|=\|\Lambda(I)\|$.)

さらに，〈定理 4.29〉より，

5° $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の C* 部分代数のとき，$\Lambda\in\mathrm{CP}(\mathcal{B},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ であれば $\tilde{\Lambda}\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ となる拡張 $\tilde{\Lambda}$ が存在する．

6° 正規な $\Lambda\in\mathrm{CP}(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ に対して，$\{W_j\,;\,j\in J\}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在して，$\Lambda(A)=\sum W_j{}^*AW_j$, ($\forall A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$)．とくに $\mathcal{H}$ が可分であれば集合 J は可算集合である．

2つの C* 力学系 $(\mathcal{A},\mathfrak{S}(\mathcal{A}),\alpha)$, $(\mathcal{B},\mathfrak{S}(\mathcal{B}),\tau)$ において，$\Lambda\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ が $\Lambda\circ\alpha_t=\tau_t\circ\Lambda$ ($\forall t\in\boldsymbol{R}$) を満たすとき，$\Lambda$ は**定常的**（または，**共変的**）というが，このとき次のことが証明される [O3].

7° $\Lambda\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ が定常的で，$\mathcal{A}\ni I$ のとき；（1） 強連続一径数ユニタリー群 $\{U_t\,;\,t\in\boldsymbol{R}\}$ が存在して $\pi(\alpha_t(A))=U_t\pi(A)U_{-t}$ ($\forall t\in\boldsymbol{R},\forall A\in\mathcal{A}$)；（2） $\tau_t(Q)=T_tQT_{-t}(\forall Q\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ であり $x\in\mathcal{H}$ が $T_tx=x$ ($\forall t\in\boldsymbol{R}$) であれば，$U_tVx=Vx$. ただし V は〈定理 4.29〉におけるもの．

Radon-Nikodym 型の次の定理が容易に証明される [S14].

8° $\Lambda,\Xi\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ において；$\Xi\leqq\Lambda\Longleftrightarrow Q\in\pi(\mathcal{A})'$ が存在して，$\Xi(A)=V^*Q\pi(A)V$. ただし，V,π は〈定理 4.29〉で与えられたもの．

$\mathcal{A}$ の共役空間 $\mathcal{A}^*$ における完全正写像について考える．$M_n(\mathcal{A}^*)$ を $\mathcal{A}$ の元を要素とする $n\times n$ 行列 $\tilde{\varphi}=(\varphi_{ij})$ ($\forall\varphi_{ij}\in\mathcal{A}^*$) の全体とする．任意の $\tilde{A}\in M_n(\mathcal{A})$ に対して，$\tilde{\varphi}(\tilde{A})=\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{ij}(A_{ij})$ とおくと，$M_n(\mathcal{A}^*)$ と $M_n(\mathcal{A})^*$ は同一視できる．また，1° より

9° $\tilde{\varphi}\in M_n(\mathcal{A}^*)_+\Longleftrightarrow\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{ij}(A_i{}^*A_j)\geqq0$ ($\forall A_i\in\mathcal{A}$) である．

Λ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への有界線形写像とし，Λ^*を$\Lambda^*\varphi(A)=\varphi(\Lambda(A))$ ($\forall A\in\mathcal{A}$, $\forall\varphi\in\mathcal{B}^*$) で定めると，$\Lambda^*$ は $\mathcal{B}^*$ から $\mathcal{A}^*$ への写像となる．このとき

〈定理 4.31〉 $\Lambda\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{B})\Longleftrightarrow\Lambda^*\in\mathrm{CP}(\mathcal{B}^*,\mathcal{A}^*)$. とくに，$(\Lambda_n)^*=(\Lambda^*)_n$, $\forall n\in\boldsymbol{N}$ である．

任意の $\varphi\in\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ に対して，$\mathcal{A}^*$ の部分集合 $\mathcal{F}_\varphi$ を集合 $\mathcal{F}_\varphi{}^+\equiv\{\psi\in\mathcal{A}^*{}_+\,;\,\psi\leqq\lambda\varphi,\lambda\geqq0\}$ の元によって張られた線形空間とし，$\mathcal{A}$ の φ に関する GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi\}$ に対して，$\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ から $\mathcal{A}^*$ への写像 θ_φ を $(\theta_\varphi Q)(A)=\langle x_\varphi,\pi_\varphi(A)Qx_\varphi\rangle$, $\forall A\in\mathcal{A}$, $\forall Q\in\pi_\varphi(\mathcal{A})'$, で定める．このとき，

10° （1） $\theta_\varphi\in\mathrm{CP}(\pi_\varphi(\mathcal{A})',\mathcal{F}_\varphi)$,（2） θ_φ は全単射,（3） $\theta_\varphi{}^{-1}\in\mathrm{CP}(\mathcal{F}_\varphi,\pi_\varphi(\mathcal{A})')$.

4.6 状態の分解

C* 代数 $\mathcal{A}$ 上の状態 φ の様々な分解について議論する．

$\mathcal{S}$ をある局所凸 Hausdorff 空間 $\mathfrak{X}$ のコンパクトかつ凸な部分集合とし，$\mathcal{S}$ の端点の集合を ex $\mathcal{S}$ で表すことにする．そこで，$\mathcal{S}$ の任意の元 φ を ex $\mathcal{S}$ の元の和（積分）で表示することを考える．まず，以下の議論で使用する記号を列記しておこう．

（1） $C_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S})$；$\mathcal{S}$ 上の実数値連続函数の全体.

（2） $K(\mathcal{S})\equiv\{f\in C_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S})$；$f$ は凸函数$\}$.

（3） $A(\mathcal{S})\equiv K(\mathcal{S})\cap -K(\mathcal{S})$（すなわち，アフィン函数の全体).

（4） $M(\mathcal{S})$；$\mathcal{S}$ 上の正則な Borel 測度（$C_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S})$ 上の正の Radon 測度）の全体.（付章 4.1 項では $M_r(\mathcal{S})$ と r を付した.）

（5） $M_1(\mathcal{S})\equiv\{\mu\in M(\mathcal{S})$；$\mu(\mathcal{S})=1\}$.

さて，$\mu\in M(\mathcal{S})$ に対して，

$$b(\mu)\equiv\int_{\mathcal{S}}\omega\,d\mu(\omega)$$

を μ の**重心** (barycenter) といい，φ がその重心となるような確率測度の全体を $M_\varphi(\mathcal{S})$ で表す：$M_\varphi(\mathcal{S})=\{\mu\in M_1(\mathcal{S})$；$b(\mu)=\varphi\}$．$\mu(Q)=\mu(\mathcal{S})$ となる最小の閉集合 $Q\subset\mathcal{S}$ を測度 μ の**台**といい，台が一点集合 $\{\varphi\}$ である測度を **Dirac 測度**とよび，δ_φ で表す．さらに，ある有限な $n\in\boldsymbol{N}$ が存在して，$\mu=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta_{\varphi_k}$（$\lambda_k>0$, $\sum\lambda_k=1$, $\varphi_k\in\mathcal{S}$）と表せるとき，μ は**有限な台**をもつという．

1° $\mu\in M_1(\mathcal{S})$ に対して，次が成立する．（1） $b(\mu)\in\mathcal{S}$ が一意に存在して，$f(b(\mu))=\int_{\mathcal{S}}f\,d\mu$ $(\forall f\in A(\mathcal{S}))$．（2） 有限な台をもつネット $\{\mu_\alpha\}\subset M_1(\mathcal{S})$ が存在して，$\mu_\alpha\xrightarrow{w^*}\mu$ かつ $b(\mu_\alpha)=b(\mu)$.

2つの測度 $\mu,\nu\in M(\mathcal{S})$ において，『$\nu\prec\mu\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\nu(f)\leqq\mu(f)$, $\forall f\in K(\mathcal{S})$ (Radon 測度とみて)』と "$\prec$" を定めると，これは $M(\mathcal{S})$ 上に順序を定める．この順序に関して極大な元の集合を $M^m(\mathcal{S})$ で表す．このとき，

2° 任意の $\mu\in M(\mathcal{S})$ に対して，$\mu_0\in M^m(\mathcal{S})$ が存在して，$\mu\prec\mu_0$ (Zorn の補題による).

3° 2つの $\mu,\nu\in M(\mathcal{S})$ に対して；（1） $\nu\prec\mu$ ならば，$\nu(\mathcal{S})=\mu(\mathcal{S})$；（2） $\mu,\nu\in M_1(\mathcal{S})$ で $\nu\prec\mu$ ならば $b(\nu)=b(\mu)$；（3） $\mu\in M_\varphi(\mathcal{S})$ ならば，$\delta_\varphi\prec\mu$.

任意の $f\in C_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S})$ に対して，$\tilde{f}(\omega)=\inf\{g(\omega)$；$g\geqq f$, $-g\in K(\mathcal{S})\}$ で定められる $\tilde{f}$ を f の**上包絡函数**という．この函数は上半連続な凹函数である．

4° 任意の $\mu\in M_1(\mathcal{S})$ と $f\in C_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S})$ に対して，$\mu\prec\nu$ かつ $\nu(f)=\mu(\tilde{f})$ となる測度 $\nu\in M_1(\mathcal{S})$ が存在する．

各 $f\in C_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S})$ に対して，$B_f\equiv\{\omega\in\mathcal{S}$；$\tilde{f}(\omega)=f(\omega)\}$ を f の**境界集合**といい，これは集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\omega\in\mathcal{S};\ \tilde{f}(\omega)-f(\omega)<\frac{1}{n}\right\}$ に等しく，したがって，$\tilde{f}$ の上半連続性より，B_f は G_δ-集合であることがわかる．

5° ex $\mathcal{S}=\cap\{B_f$；$f\in C_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S})\}$.

6° $\mu\in M(\mathcal{S})$ に対して次は同値.（1） $\mu\in M^m(\mathcal{S})$.（2） $\mu(B_f)=\mu(\mathcal{S})$, $\forall f\in K(\mathcal{S})$.（3） $\mu(\tilde{f})=\mu(f)$, $\forall f\in C_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S})$.

6° の（2）より，測度 $\mu\in M^m(\mathcal{S})$ を**境界測度**という場合もある．また，6° と 2° より任意の $\varphi\in\mathcal{S}$ に対して，$\mu\in M^m(\mathcal{S})$ が存在して，$\varphi=b(\mu)$ と表せることがわかる．

ところで，$\mathcal{S}$ が距離付可能であれば，$K(\mathcal{S})$ は強い意味の凸函数 f (i. e., $f(\lambda\varphi+(1-\lambda)\psi)\lneqq\lambda f(\varphi)+(1-\lambda)f(\psi)$, $\forall\lambda\in(0,1)$) を含むので，この f に対して，$B_f=\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ が示せ，よって，$\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ が G_δ-集合となる．したがって，

〈定理 4.32〉 $\mathcal{S}$ が距離付可能なコンパクトな凸集合のとき；（1） $\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ は G_δ-集合；（2） $\mu\in M_1{}^m(\mathcal{S})\Longleftrightarrow\mu(\mathrm{ex}\,\mathcal{S})=1$；（3） 任意の $\varphi\in\mathcal{S}$ に対して，$\mu\in M_1{}^m(\mathcal{S})$ が存在して，$\varphi=b(\mu)$.

$\mathcal{S}$ が距離付可能でない場合は

〈定理 4.33〉 $\mathcal{S}$ がコンパクトと凸集合のとき；（1） 任意の $\mu\in M_1{}^m(\mathcal{S})$ は $\mathrm{ex}\,\mathcal{S}$ を**準台**とする（すなわち，$\mathrm{ex}\,\mathcal{S}\subset Q\subset\mathcal{S}$ である任意の Baire 集合 Q に対して，$\mu(Q)=1$)；（2） 任意 $\varphi\in\mathcal{S}$ に対して，（1）の μ が存在して，$\varphi=b(\mu)$.

さて，上の2つの定理における $\varphi\in\mathcal{S}$ を表現している極大測度 μ の一意性について考察しよう．

局所凸 Hausdorff 空間 $\mathcal{X}$ のコンパクトな凸部分集合 $\mathcal{S}$ が0を頂点とする凸錐 $\mathcal{K}$ の基 (base) であるとする (i. e., $\mathcal{K}=\{\lambda\omega\,;\,\lambda\geqq 0,\ \omega\in\mathcal{S}\}$)．この $\mathcal{K}$ は，$\mathcal{X}$ と $\boldsymbol{R}\times\mathcal{X}$ を同一視し，$\mathcal{S}$ と $\{1\}\times\mathcal{S}$ を同一視すると，$\{1\}\times\mathcal{S}$ より生成される凸錐である．『$\omega_1\geqq\omega_2\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}\omega_1-\omega_2\in\mathcal{K}$』と“$\geqq$”を定めると，これは $\mathcal{K}$ 上に順序を与える．この順序 $\geqq$ に対して $\mathcal{K}$ が束になっているとき，$\mathcal{S}$ は **Choquet 単体**（以下，**単体**と略す）であるといわれる．

〈定理 4.34〉 $\mathcal{S}$ がコンパクトな凸集合のとき次は同値である．（1） $\mathcal{S}$ が単体．（2） 任意の $\varphi\in\mathcal{S}$ に対して，極大確率測度 $\mu\in M_\varphi(\mathcal{S})$ は一意．（3） 任意の $f\in K(\mathcal{S})$ に対して，$\tilde{f}\in A(\mathcal{S})$.

ところで，$(\mathcal{A},\mathfrak{S},\alpha(G))$ を C*-力学系とし，$I(\alpha)$ を α-不変な状態の全体 (i. e., $\varphi\circ\alpha_g=\varphi$, $\forall g\in G$), $K_\beta(\alpha)$ ($G=\boldsymbol{R}$ のとき）を α_t に関して定数 β で KMS 条件を満たす状態の全体とすると，これらの集合は弱＊コンパクトな凸集合になる．以下，$\mathcal{S}$ として $\mathfrak{S}$, $K_\beta(\alpha)$, $I(\alpha)$ 各々の場合を考える．ただし，$\mathcal{A}\ni I$ である．

$\mu\in M_1(\mathfrak{S})$ に対して，$\varphi=b(\mu)$ であれば，$L^\infty(\mathfrak{S},\mu)$ から $\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ への**連続な正写像 θ_μ が一意に存在して**，$\theta_\mu(1)=I$, $\langle x_\varphi,\theta_\mu(f)\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle=\int_{\mathfrak{S}}f(\omega)\omega(A)d\mu(\omega)$ ($\forall A\in\mathcal{A}$, $\forall f\in L^\infty(\mathfrak{S},\mu)$) となる．ここで x_φ は φ に付随する巡回ベクトルである．

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{S}$ に対して，$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{A}^*_+$ とおくと，次は同値である：（1） $\psi \in \mathcal{A}^*_+$ が $\psi \leqq \varphi_1$，$\psi \leqq \varphi_2$ のとき $\psi = 0$．（2） 射影作用素，$E \in \pi_\varphi(\mathcal{A})'$ が存在して，$\varphi_1(A) = \langle x_\varphi, E\pi_\varphi(A)x_\varphi \rangle$，$\varphi_2(A) = \langle x_\varphi, (I-E)\pi_\varphi(A)x_\varphi \rangle$． （3） $\mathcal{H}_\varphi = \mathcal{H}_{\varphi_1} \oplus \mathcal{H}_{\varphi_2}$，$\pi_\varphi = \pi_{\varphi_1} \oplus \pi_{\varphi_2}$，$x_\varphi = x_{\varphi_1} \oplus x_{\varphi_2}$．

これらの条件を満たす 2 つの φ_1, φ_2 は**互いに直交する**といい，$\varphi_1 \perp \varphi_2$ で表す．いま，$\mu \in M(\mathfrak{S})$ が任意の Borl 集合 $Q \subset \mathfrak{S}$ (i. e., $Q \in \mathcal{B}(\mathfrak{S})$) に対して，

$$\left(\int_Q \omega\, d\mu\right) \perp \left(\int_{\mathfrak{S}\setminus Q} \omega\, d\mu\right)$$

を満たすとき，μ は $\mathfrak{S}$ 上の**直交測度**であるという．φ を重心とする直交測度の全体を $\mathcal{O}_\varphi(\mathfrak{S})$ で表す．このとき，$\mu \in M_1(\mathfrak{S})$ に対して；

7° 次は同値である． （1） $\mu \in \mathcal{O}_\varphi(\mathfrak{S})$． （2） $\theta_\mu(1_Q)\theta_\mu(1-1_Q) = 0$，$\forall Q \in \mathcal{B}(\mathfrak{S})$ (ただし，1_Q は Q の特性函数)．（3） θ_μ は * 同型写像．

および，

8° （1） $\mu \in \mathcal{O}_\varphi(\mathfrak{S})$；（2） $\mu \in \mathrm{ex}\, M_\varphi(\mathfrak{S})$；（3） $\tilde{A}(\omega) = \omega(A)$ と $\tilde{A}$ を定めたとき，集合 $\{\tilde{A} ; A \in \mathcal{A}\}$ が $L^1(\mathfrak{S}, \mu)$ で稠密：このとき，（1）⇒（2）⟺（3）．

さらに，$\mu \in \mathcal{O}_\varphi(\mathfrak{S})$ に対して，集合 $\mathcal{C}_\mu \equiv \{\theta_\mu(f) ; f \in L^\infty(\Omega, \mu)\}$ は $\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ の可換な v. N. 部分代数となる．

〈定理 4.35〉 $\varphi \in \mathfrak{S}$ と $\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ の任意の可換な v. N. 部分代数 $\mathcal{C}$ に対して，$\mu \in \mathcal{O}_\varphi(\mathfrak{S})$ が一意に存在して $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\mu$．

〈定理 4.36〉 $\mu, \nu \in \mathcal{O}_\varphi(\mathfrak{S})$ に対して次は同値である． （1） $\nu \prec \mu$．（2） $\mathcal{C}_\nu \subset \mathcal{C}_\mu$． （3） $P_\nu \leqq P_\mu$ (ただし，P_μ は $\{\mathcal{C}_\mu x_\varphi\}^-$ への射影作用素)． （4） $\nu(|\tilde{A} - \nu(\tilde{A})|^2) \leqq \mu(|\tilde{A} - \mu(\tilde{A})|^2)$，$\forall A \in \mathcal{A}$．

この定理より，$\mathcal{C}_\mu$ が極大な可換 v. N. 代数 (i. e., $\mathcal{C}_\mu' = \mathcal{C}_\mu$) のとき，$\mu$ が極大測度になることがわかる．

〈定理 4.37〉 $\varphi \in \mathfrak{S}$ に対して，次は同値である．（1） $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ が可換な v. N. 代数．（2） φ を重心とする極大測度 μ が一意に存在する（よって，μ は $\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ に対する直交測度である)．

〈定理 4.38〉 $\mu \in \mathcal{O}_\varphi(\mathfrak{S})$ に対する $\mathcal{C}_\mu$ が $\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ における極大な可換 v. N. 代数であれば，μ は $\mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$ 上に準台をもつ．とくに，$\mathcal{A}$ が可分であれば，この μ は $\mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$ 上に台をもつ．

註 $\mathcal{A}$ が可分であれば，$\mathfrak{S}$ は距離付可能になる．つまり，$\mathcal{A}$ の単位球 $\mathcal{A}_1$ における

稠密な元の列 $\{A_n\}$ に対して，$\mathfrak{S}$ 上の距離 d を $d(\varphi_1,\varphi_2)=\sum|(\varphi_1-\varphi_2)(A_n)|/2^n$ と定めると，この d によって $\mathfrak{S}$ に導入される位相が $\mathfrak{S}$ 上の弱 $*$ 位相に等しい．

9° 次は同値である．（1）$\mathcal{A}$ が可換な C* 代数．（2）$\mathfrak{S}$ が単体．（3）$\mathcal{A}_+$ が束をなす．

$C_\mu=\mathcal{Z}_\varphi$ $(\equiv\pi_\varphi(\mathcal{A})''\cap\pi_\varphi(\mathcal{A})')$ となる直交測度 $\mu\in M_\varphi(\mathfrak{S})$ を**中心**（**central**）**測度**といい，$C_\mu\subset\mathcal{Z}_\varphi$ となる直交測度 $\mu\in M_\varphi(\mathfrak{S})$ を**準中心**（**subcentral**）**測度**という．さて，$\mathcal{Z}_\varphi=\boldsymbol{C}I$ となる状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ は因子とよんだ（付章 2.8 項）が，因子状態の全体を $\mathcal{F}$ と書くことにする．このとき

〈定理 4.39〉 中心測度 $\mu\in\mathcal{O}_\varphi(\mathfrak{S})$ は $\mathcal{F}$ 上に準台をもつ．

この定理と〈定理 4.35〉より，任意の $\varphi\in\mathfrak{S}$ を因子状態に分解する中心測度は一意に存在することがわかる．さらに，KMS 状態の全体 $K_\beta(\alpha)$ は単体になっていることが知られているので，〈定理 4.8〉を考慮すると，

〈定理 4.40〉 $\varphi\in K_\beta(\alpha)$ を $\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)$ $(\subset\mathcal{F})$ へ分解する極大測度 μ が一意に存在し，これは中心測度である．

ところで，2つの状態 $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ が**互いに素**（$\varphi\,\delta\,\psi$ と記す）であるとは，表現 π_φ,π_ψ が互いに素の場合をいう（〈定理 4.13〉参照）．

10° 次は同値である．（1）$\varphi\,\delta\,\psi$．（2）射影作用素 $E\in\mathcal{Z}_\omega$ $(\omega=\varphi+\psi)$ が存在して，$\varphi(A)=\langle x_\omega,\ E\pi_\omega(A)x_\omega\rangle$ かつ $\psi(A)=\langle x_\omega,\ (I-E)\pi_\omega(A)x_\omega\rangle$ $(\forall A\in\mathcal{A})$.

11° $\varphi,\psi\in\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)$ であれば，$\varphi=\psi$ または $\varphi\,\delta\,\psi$ である．

最後に，α-不変状態 $\varphi\in I(\alpha)$ の端点分解について次の結果がある．

〈定理 4.41〉 $\varphi\in I(\alpha)$ に対して次が成立する；（1）$\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ を準台とする $\mu\in\mathcal{O}_\varphi(I(\alpha))$ が存在する；（2）$(\mathcal{A},\alpha(G))$ が φ において **G-可換**（すなわち，E_φ を $\mathcal{H}_\varphi$ から $u_g{}^\varphi$-不変なベクトルの集合（付章 2.5 項）への射影作用素とするとき，$E_\varphi\pi_\varphi(\mathcal{A})''E_\varphi$ が可換 v. N. 代数）であれば，$I(\alpha)$ は単体となり，したがって，（1）の μ は一意な極大測度であり，$C_\mu=\pi_\varphi(\mathcal{A})'\cap u^\varphi(G)'$ となる．

註 $\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ の元は**エルゴード状態**といわれている．また，$G=\boldsymbol{R}$ のとき，$K_\beta(\alpha)\subset I(\alpha)$ であるから，$\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)\subset\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ である．

この節の議論は［B7, C2, R5, R6, T4］に詳しい．

参 考 文 献

（ここでは，一般的な参考書と本書で引用した論文および本書の内容と関連の深いもののみを挙げる．）

[A. 1] L. Accardi and C. Cecchini, Conditional expectations in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki : J. Func. Anal. **45** (1982), 275–273.

[A. 2] J. Aczel, B. Forte and C. T. Ng : Why the Shannon and Hartely entropies are "natural"? Adv. Appl. Prob. **6** (1974), 131–146.

[A. 3] T. Ando : Topics on Operator inqualities, preprint.

[A. 4] H. Araki and E. H. Lieb : Entropy inequalities, Commun. Math. Phys. **18** (1970), 160–170.

[A. 5] H. Araki : Positive cone, Radon-Nikodym theorems, relative Hamiltonian and the Gibbs condition in statistical mechanics, Lecture at Varenna Summer School, (1973), 1–64.

[A. 6] H. Araki : Some properties of modular conjugation operator of von Neumann algebras and a non-commutative Radon-Nikodym theorem with a chain rule, Pacific J. Math. **50**(1974), 309–354.

[A. 7] H. Araki and P. D. F. Ion : On the equivalence of KMS and Gibbs conditions for states of quantum lattice systems, Commun. Math. Phys. **35**(1974), 1–12.

[A. 8] H. Araki : On the equivalence of the KMS condition and the variational principle for quantum lattice systems, Commun. Math. Phys. **38** (1974), 1–10.

[A. 9] H. Araki : Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **11** (1976), 809–833.

[A.10] H. Araki : Relative entropy and its application, in Les Methods Mathematiques de la Theorie Quantum des Champs, F. Guerra, D. W. Robinson, and R. Stora, eds., CNRS, Paris (1976).

[A.11] H. Araki : Relative entropy for State of von Neumann algebras II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **13** (1977), 173–192.

[B. 1] C. R. Baker : Mutual information for Gaussian processes, SIAM, J. Appl. Math. **19** (1970), 451–458.

[B. 2] C. R. Baker : Joint measures and crosscovariance operators, Trans. Amer. Math. Soc. **186** (1973), 273–289.

[B. 3] C. R. Baker : Capacity of the Gaussian channel without feedback, Inform. and Control **37** (1978), 70–89.

[B. 4] J. Bendat and S. Sherman : Monotone and convex operator functions,

Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 58-71.

[B. 5] S. K. Berberian : Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag, (1974).

[B. 6] B. Birula and J. Mycielski : Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics, Commun. Math. Phys. **44** (1975), 129-132.

[B. 7] O. Bratteli and D. W. Robinson : Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I, Springer, New YOrk, (1981).

[B. 8] O. Bratteli and D. W. Robinson : Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II, Springer, New York, (1981).

[B. 9] L. Brillouin : Science and Information Theory, Academic Press, (1962). (佐藤訳, 科学と情報理論, みすず書房, (1969)).

[B.10] A. T. Bharucha-Reid (Ed.) : Random Integral Equations, Acad. Press (1972).

[B.11] A. T. Bharucha-Reid (Ed.) : Approximate Solution of Random Equations, North-Holland (1971).

[C. 1] M. D. Choi : A Schwarz inequality for positive linear maps on C*-algebras, Illinois J. Math. (1975), 559-574.

[C. 2] G. Choquet : Lecture Analysis I, II, III, Bengamin, New York, (1969).

[C. 3] A. Connes : Une classification des facteurs de type III, Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4, **6** (1973), 133-252.

[C. 4] A. Connes and E. Størmer : Entropy for authomorphisms of II_1 von Neumann algebras,

[D. 1] N. Dang-Ngoc : Pointwise convergence of martingales in von Neumann algebras, Israel J. Math. **34** (1979), 273-280.

[D. 2] E. B. Davies : On Borel structure of C*-algebras, Commun. Math. Phys. **8** (1968), 147-163.

[D. 3] E. B. Davies and J. T. Lewis : An operational approach to quantum probability, Commun. Math. Phys. **17** (1970), 239-260.

[D. 4] E. B. Davies : Quantum Theory of Open System, Academic Press, New Ycrk, (1976).

[D. 5] E. B. Davies : Information and quantum measurement, IEEE Trans. Inform. Theory, (1977), 530-534.

[D. 6] C. Davis : A Schwarz inequality for convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 42-44.

[D. 7] C. Davis : Operator-valued entropy of a quantum mechanical measurement, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 533-538.

[D. 8] O. Dobsch : Matrixfunktionen beschränkten Schwankung, Math. Zeit **43** (1937), 353-388.

[D. 9] W. Donogue : Monotone matrix functions and analytic continuation, Springer (1974).

[D.10] S. Doplicher, D. Kastler and D. W. Robinson : Covariance algebras in field theory and statistical mechanics, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 1-28.

[D.11] S. Doplicher, D. Kastler and E. Størmer : Invariant states and asymptotic abelianness, J. Func. Anal. 3 (1969), 419-435.

[D.12] H. Dye : The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 243-280.

[E. 1] M. Echigo and M. Nakamura : A remark of the concept of channels, Proc. Japan Acad. 38 (1962), 234-280.

[E. 2] G. G. Emch : Generalized K-flows, Commun. Math. Phys. 49 (1976), 191-215.

[E. 3] G. G. Emch : Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory, Wiley, New York, (1971).

[E. 4] G. G. Emch : Positivity of the K-entropy on non-abelian K-flows, Z. Wahr. Gebiete, 29 (1974), 241-252.

[E. 5] H. Epstein : Remarks on two theorems of E. Lieb, Commun. Math. Phys. 31 (1973), 317-325.

[E. 6] H. Ezawa and T. Tsuneto 編, 量子物理学の展望上, 下, 岩波書店, 1978.

[F. 1] M. Fukamiya : On a theorem of Gelfand and Naĭmark and the B*-algebra, Kumamoto J. Sci. 1 (1952), 17-22.

[G. 1] D. Gabor : Communication theory and physics, Phil. Mag. 41 (1950), 1161-1187.

[G. 2] S. Goldstein : Convergence of martingales in von Neumann algebras, Bull. Acad. Polon. Sci. 27 (1979), 1853-1859.

[G. 3] S. Goldstein and O. Penrose : A nonequilibrium entropy for dynamical systems, J. Stat. Phys. 24 (1981), 325-342.

[G. 4] V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski and E. L. G. Sudarshan : Properties of quantum markovian master equations, Rep. Math. Phys. 13 (1982), 149-173.

[G. 5] M. S. Green : Markoff random processes and the statistical mechanics of time-dependent phenomena, J. Chemi. Phys. 20 (1952), 1281-1295.

[G. 6] A. Gudder : Radon Nikodym theorem for *-algebras, Pacific J. Math, 80 (1979), 141-149.

[G. 7] S. P. Gudder and R. L. Hudson : A noncommutative probability theory, Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978), 1-41.

[G. 8] S. Gudder and J. P. Marchand : Noncommutative probability on von

Neumann algebras, J. Math. Phys., **13** (1972), 799-806.

[G. 9] G. S. Gudder and J. P. Marchand : Conditional expectations on von Neumann algebras : A new approach, Rep. Math. Phys., **12** (1977) 317-329.

[G.10] S. Guiasu : Information Theory with Applications, Mcgraw-Hill, (1977).

[H. 1] R. Haag, N. M. Hugenholtz and M. Winnink : On the equilibrium states in quantum statistical systems, Commun. Math. Phys., **5** (1967), 215-236.

[H. 2] U. Haagerup : The standard form of von Neumann algebras, Math. Scand. **37** (1975), 271-283.

[H. 3] C. W. Helstrom, J. W. S. Liu and J. P. Gordon : Quantum mechanical communication theory, Proc. IEEE **58** (1970), 1578-1598.

[H. 4] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada : Sufficiency, KMS condition and relative entropy in von Neumann algebras, Pacific J. Math. **96** (1981), 99-109.

[H. 5] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada : Sufficiency and relative entropy in *-algebra with applications in quantum systems, Pacific J. Math. **107** (1983), 117-140.

[H. 6] T. Hida and M. Hituda : ガウス過程, 紀伊国屋書店, (1976).

[H. 7] A. S. Holevo : Problems in the mathematical theory of quantum communication channels, Rep. Math. Phys. **12** (1977), 273-278.

[H. 8] A. S. Holevo : Information theoretical aspects of quantum measurement, Problemy Peredači Informacii **9** (1973), 31-42.

[H. 9] K. Huang : Statistical mechanics, J. Wiley (1963).

[I. 1] S. Ihara, 確率過程とエントロピー, 応用数学叢書, 岩波書店, 1984 年.

[I. 2] N. Ikeda and S. Watanabe : Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland, (1981).

[I. 3] R. S. Ingarden and K. Urbanik : Quantum information thermodymamics, Acta Phys. Polon. **21** (1962), 281-304.

[I. 4] R. S. Ingarden : Information theory and thermodynamics of light. Part I : Foundation of information theory, Fortschritte der Physik, **12** (1964), 567-594.

[I. 5] R. S. Ingarden : Information theory and thermodynamics of light. Part II : Principles of information thermodynamics, Fortschritte der Physik, **13** (1965), 755-805.

[I. 6] R. S. Ingarden : Quantum information theory, Rep. Math. Phys. **10** (1976), 43-73.

[I. 7] R. B. Israel : Convexity in the Theory of Lattice Gases, Princeton Univ. Press, Princeton, (1979).

[J. 1] E. T. Jaynes: Information theory and statistical mechanics, Phys. Rev. **106** (1957), 620-630 and **108** (1975), 171-182.

[K. 1] R. V. Kadison: A generalized Schwarz inequality and algebraic invariant for operator algebras, Ann. Math. **83** (1966), 280-293.

[K. 2] I. Kovács and J. Szücs: Ergodic type theorem in von Neumann algebras, Acta Sci. Math. **27** (1966), 233-246.

[K. 3] K. Kraus: General state changes in quantum theory, Ann. Phys. **64** (1970), 311-335.

[K. 4] F. Krauss: Uber konvexe matrixfunktionen, Math. Zeit **41** (1936), 18-42.

[K. 5] R. Kubo: Statistical mechanical theory of irreversible processes I, J. Phys. Soc. Japan, **12** (1957), 570-586.

[K. 6] R. Kubo: 統計力学, 共立出版, (1953).

[K. 7] H. Kunita: 確率過程の推定, 産業図書, (1976).

[K. 8] K. Kunisawa and H. Umegaki: 情報理論の進歩, 岩波, (1965).

[K. 9] H. H. Kuo: Gaussian Measure in Banach Spaces, Springer, Berlin, (1975).

[L. 1] O. E. Lanford and D. W. Robinson: Statistical mechanics of quantum spin systems. III, Commun. Math. Phys. **9** (1968), 327-338.

[L. 2] O. E. Lanford and D. W. Robinson: Mean entrophy of states in quantum statistical mechanics, J. Math. Phys. **9** (1968), 1120-1125.

[L. 3] G. Lassner and G. A. Lassner: On the continuity of entropy, Rep. Math. Phys. **15** (1979), 41-46.

[L. 4] E. H. Lieb and M. B. Ruskai: Proof of the strong subadditivity of quantum mechanical entropy, J. Math. Phys. **14** (1973).

[L. 5] E. H. Lieb: Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture, Adv. Math. **11** (1973), 267-288.

[L. 6] G. Lindblad: An entropy inequality for quantum mechanics, Commun. Math. Phys. **28** (1972), 245-249.

[L. 7] G. Lindblad: Entropy, information and quantum measurements, Commun. Math. Phys. **33** (1973), 305-322.

[L. 8) G. Lindblad: Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems, Commun. Math. Phys. **39** (1974), 111-119.

[L. 9] G. Lindblad: Completely positive maps and entropy inequalities, Commun. Math. Phys. **40** (1975), 147-151.

[L.10] G. Lindblad: On the generators of quantum dynamical semigroups, Commun. Math. Phys. **48** (1975), 119-130.

[L.11] G. Lindblad: Non-markovian quantum stochastic processes and their entropy, Commun. Math. Phys. **65** (1979), 281-294.

[L.12] K. Löwner: Über monotone matrix funktionen, Math. Z. **38** (1934),

177-216.

[M. 1] M. Maeda : Rotationally invariant cylindrical measures, Kōdai Math. Semi. Rep. 6 (1983), 14-25.
[M. 2] P. C. Martin and J. Schwinger : Theory of many particle systems I, Phys. Rev. 115 (1959), 1342-1373.
[M. 3] P. A. P. Moran : Entropy, Markov processes and Boltzmann's H-theorem, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961), 833-
[M. 4] F. J. Murray and J. von Neumann : On rings of operators, Ann. Math., 37 (1936), 116-229.

[N. 1] Y. Nakagami and M. Takesaki : Duality for Crossed Product of von Neumann Algebras, Lecture Notes in Math. Vol. 731, Springer-Verlag (1979).
[N. 2] M. Nakamura and Z. Takeda : On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 34 (1958), 489-494.
[N. 3] M. Nakamura, M. Takesaki and H. Umegaki : A remak on the expectations of operator algebras, Kodai Math. Sem. Rep. 12 (1960), 82-90.
[N. 4] M. Nakamura and H. Umegaki : A note on the entropy for operator algebras, Proc. Jap. Acad. 37 (1961), 149-154.
[N. 5] M. Nakamura and H. Umegaki : On von Neumann theory of measurements in quantum statistics, Math. Japan 7 (1962), 151-157.
[N. 6] M. Nakamura : 関数解析入門, 槇書店, (1968).

[O. 1] W. Ochs.: A new axiomatic characterization of the von Neumann entropy, Rep. Math. Phys. 8 (1975), 109-120.
[O. 2] W. Ochs and H. Spohn : A characterization of the Segal entropy, Rep. Math. Phys. 14 (1978), 75-87.
[O. 3] M. Ohya : Quantum ergodic channels in operator algeblas, J. Math. Anal. Appl. 84 (1981), 318-328.
[O. 4] M. Ohya : Entropy transmission C*-dynamical systems, to appear in J. Math. Anal. Appl.
[O. 5] M. Ohya : On compound state and mutual information in quantum information theory, IEEE Information Theory, 29 (1983), 770-774.
[O. 6] M. Ohya : Note on quantum probablity, L Nuovo Cimento. 38, (1983) 402-404
[O. 7] M. Ohya : On quantum dynamics, Fifth-semi. Appl. Funct. Anal. (1983), 1-12.
[O. 8] M. Ohya : 現代数学と現代物理学の交流, 科学47 (1977), 728-734.
[O. 9] M. Ohya : On open system dynamics, Kodai Math. J. 3 (1980), 287-294.

[O.10] M. Ozawa : Optimal measurements for general quantum systems, to appear in Rep. Math. Phys.

[P. 1] G. K. Pedersen and M. Takesaki : The Radon-Nikokym theorems for von Neumann algebras, Acta Math. **130** (1973), 53-87.

[P. 2] O. Penrose : Foundations of Statistical Mechanics, Pergamon (1970).

[P. 3] R. R. Phelps : Lecture on Choquet's Theorem, Van Nostrand, (1966).

[P. 4] R. J. Plymen : C*-algebras and Mackey's axioms, Commun. Math. PHys. **8** (1968), 132-146.

[P. 5] R. T. Powers : Self-adjoint algebras of unbounded operators, Commun. Math. Phys. **21** (1971), 85-124.

[P. 6] Y. V. Prokhorov : Convergence of random processes and limit theorem in probability theory, Theo. Pro. Appl. **2** (1956), 157-214.

[P. 7] W. Pusz and S. L. Woronowicz : Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, Rep. Math. Phys. **8** (1975), 159-170.

[R. 1] C. R. Rao and V. S. Varadarajan : Discrimination of Gaussian processes, Sankhyā Ser. A **25** (1963), 303-330.

[R. 2] M. Reed and B. Simon : Methods of Modern Mathematical Physics Vo. I : Functional Analysis, Academic Press, (1973).

[R. 3] M. Rieffel and A. van Daele : A bounded operator approach to Tomita-Takesaki theory, Pacific J. Math. **69** (1977), 187-221.

[R. 4] D. W. Robinson and D. Ruelle : Mean entropy of states in classical statistical mechanics, Commun. Math. Phys. **5** (1967), 288-300.

[R. 5] D. Ruelle : Statistical Mechanics : Rigorous Results, Benjamin, (1969).

[R. 6] D. Ruelle : Integral representation of states on a C*-algebra, J. Func. Anal. **6** (1970), 116-151.

[R. 7] M. B. Ruskai : A generalization of entropy using trace on von Neumann algebras, Ann. Inst. Henri Poincaré, **19** (1973), 357-373.

[S. 1] S. Sakai : C*-algebras and W*-algebras, Springer, Berlin, (1971).

[S. 2] R. Schatten : A theory of cross-spaces. Ann. Math. Studies No. 26, Princeton Univ. Press 1950.

[S. 3] R. Schatten : Norm ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, (1970).

[S. 4] L. I. Schiff : Quantum Mechanics, 2 nd ed. John Wiley & Sons, New York, (1968).

[S. 5] I. E. Segal : A non-commutative extention of abstract integration, Ann. Math. **57** (1953), 401-457.

[S. 6] I. E. Segal : A note on the concept of entropy, J. Math. Mechan. **9** (1960), 623-629.

[S. 7] C. R. Shannon : A mathematical theory of communication, Bull System tech. J. **27** (1948), 379-423 and 623-656.

[S. 8] B. Simon : A contribution in ref. [Lieb-Ruskai].
[S. 9] B. Simon : Trace ideals and their applications, Cambridge Univ. Press (1979).
[S.10] S. Simons : On the time derivatives of Boltzmann's H function, J. Phys. A, Ser 2, 2 (1969).
[S.11] A. V. Skorohod : Integration in Hilbert space, Springer-Verlag, (1974).
[S.12] W. F. Stinespring : Positive functions on C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1965), 211-
[S.13] E. Størmer : Entropy in finite von Neumann algebras, Symposia Math. 20 (1970), 197-206.
[S.14] E. Størmer : Positive linear maps of operator algebras, Acta. Math. 110 (1971), 233-278.
[S.15] E. C. G. Stueckelberg : Theoreme H et unitarite de S, Helv. Phys. Acta., 25 (1952), 577-580.

[T. 1] H. Takahashi : Information theory of quantum mechanical channels, in Advances in Communication Systems Vo. 1, Academic Press, (1966), 227-310.
[T. 2] M. Takesaki : Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications, Springer, Lecture note in Math., Vol. 128, (1970).
[T. 3] M. Takesaki : Conditional expectations in von Neumann algebras, J. Func. Anal. 9 (1972), 306-321.
[T. 4] M. Takesaki : Theory of Operator Algebras I, Springer, New YOrk, (1979).
[T. 5] W. Thirring : Quantum Mechanics of Large Systems, Springer-Verlag (1983).
[T. 6] C. J. Thompson : Inequality with applications in statistical mechanics, J. Maht. Phys. 6 (1963), 1812-1813.
[T. 7] M. Tomita : Quasi-standard von Neumann algebras, Unpublished
[T. 8] J. Tomiyama : On the projection of norm one in W*-algebras, Proc. Japan Acad. 33 (1957), 608-612.

[U. 1] H. Uhlmann : On the Shannon entropy and related functionals on convex sets, Rep. Math. Phys. 1 (1970), 147.
[U. 2] H. Uhlmann : Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in interpolation theory, Commun. Math. Phys. 54 (1977), 21-32.
[U. 3] H. Umegaki : Decomposition theorems of operator algebra and their applications, Japanese J. of Math. 22 (1952), 27-50.
[U. 4] H. Umegaki : Conditional expectation in an operator algebra, Tohoku Math. J. 6(1954), 177-181.

[U. 5] H. Umegaki : Conditional expectation in an operator algebra, II, Tohoku Math. J. 8 (1956), 86-100.

[U. 6] H. Umegaki : Conditional expectation in an operator algebra, III, Kodai Math. Sem. Rep. 11 (1959), 51-64.

[U. 7] H. Umegaki : On information in operator algebras, Proc. Japan. Academy, 37 (1961), 459-461.

[U. 8] H. Umegaki : Conditional expectation in an operator algebra, IV, (entropy and information), Kodai Math. Sem. Rep. 14 (1962), 59-85.

[U. 9] H. Umegaki : von Neumann algebras consisting of random functions, Third-Sem. Appl. Func. Anal. (1980), 1-10.

[U. 10] H. Umegaki : 作用素環における Conditional expectation と Entropy の概念について，実函数論シンポジウム 7 (1967)，綜合講演集録 44-59.

[U. 11] H. Umegaki, M. Ohya and F. Hiai : エントロピーと情報，日本物理学会誌 35 (1980) 241-252.

[U. 12] H. Umegaki, Ergodic, decomposition of stationary linear functional, Proc. Japan Acad. 30 (1954), 358-362.

[U. 13] H. Umegrki, 作用素環と確率論に関する二，三の問題，作用素環とその物理的応用に関する研究報告集，京都大学数解析講究録刊行会 1465 年，40 頁一66 頁.

[U. 14] K. Urbanik : Joint probability distribution of observables in quantum mechanics, Stud. Math. T. 21 (1961), 317-323.

[V. 1] A. van Daele : A new approach to the Tomita-Takesaki theory of generalized Hilbert algebras, J. Func. Anal. 15 (1974), 378-393.

[V. 2] A. van Daele : Continuous crossed products and type III von Neumann algebras, Cambridge Univ. Press, (1978).

[V. 3] V. S. Varadarajan : Probability in physics and a theorem on simultaneous observability, Commun. Pure and Appl. Math. 15 (1962), 189-217.

[V. 4] J. von Neumann : Die mathematischen grundlagen der quantenmechanik, Springer-Berlin, (1932).

[V. 5] J. von Neumann : Collected works,
Vol. 1 : Logic, Theory of sets and quantum mechanics,
Vol. 2 : Operators, ergodic theory and almost periodic functions in a Group,
Vol. 3 : Rings of operators,
Vol. 4 : Continuous geometry and other topics,
Vol. 5 : Design of computer, theory of automata and numerical analysis,
Vol. 6 : Theory of games, astrophysis hydrodynamics and meteorology.

[W. 1] A. Wehrl : How chaotic is a state of quantum system?, Rep. Math. Phys. **6** (1974), 15-28.

[W. 2] A. Wehrl : Three therems about entropy and convergence of density matrices, Rep. Math. Phys. **10** (1976), 159-163.

[W. 3] A. Wehrl : General properties of entropy, Rev. Mod. Phys. **50**, (1978), 221-2260

[W. 4] D. V. Widder : The Laplace Transform, Princeton Univ. Press, (1941).

[W. 5] E. P. Wigner and M. M. Yanase : Information content of distribution, Prov. Nat. Acad. Si U. S. A. **49** (1963), 910-918.

[W. 6] E. P. Wigner and M. M. Yanase : On the positive semidefinite nature of certain matrix expressions, Canad. J. Math. **16** (1964), 397-406.

[Y. 1] K. Yanagi : On some properties of Gaussian channels, J. Math. Anal. Appl. **88** (1982), 364-377.

[Y. 2] K. Yosida : Functional Analysis, 2 nd ed. Springer-Verlag, (1968).

[Y. 3] H. Yukawa and T. Toyota 編, 量子力学 I , II, 岩波書店, (1978).

あ と が き

情報理論の函数解析的基礎と題し，主題をそれぞれ「確率論的エントロピー」と「量子論的エントロピー」と銘打った一対の書物が，ここに漸く完成を見た．函数解析的基礎という数学の標傍は情報科学に関心をもたれる方々には，或いは奇異な感を受けられるかも知れない．本書を終るに当たって，このことに言及し，合わせて情報理論・エントロピー理論の生い立ちを説明したい．

函数解析学は，古くからの解析学や，その周辺領域の応用を取り込んで発展してきた，比較的新しい分野であるが，現在それが数学の広大な領域のどの部分を占めているかは，人々により認識が異なると思う．1940 年代頃は抽象解析といわれたこともあり，また，位相的手段を用いて解析を進めるため位相解析と呼称されてもいた（現在もそう呼ばれることもある）．しかし，函数解析の守備範囲は，ここ 20 年間程で拡大し，それ以前とは大分異なった認識がもたれているのではないかと思われる．例えば，目下，非可換函数解析とか，非線形函数解析など新しい目標をもった分野が活発になりつつある．本書では所々に，これらに関連のある論議がなされているが，そのうちエントロピーの概念そのものも非線形現象の解析であり，さらに von Neumann 代数上の諸理論は非可換函数解析である．

しかし一方，この函数解析学という分野はともすれば安易な一見して演習問題的な，単なる抽象化・一般化の無意味な形式数学に流れやすい危険性が内臓されていることは否めない．この点については，この第 2 巻の自序において触れた通りである．

本書では，函数解析が空理空論に陥ることがない，いくつかの典型が随所に折り込まれて，そのような意識を保ちながら書き進められている．したがって，それらの必然的な要請により，函数解析が基盤となることはいうまでもない．その基礎知識がおおむね達成されるよう，つまり，本書が自己充足的であるように書かれている．第 1 巻の付章は標準的な函数解析入門に対応している．函数解析をさらに学ぼうという目的に対しては，この付章を読まれたあとで函数解析の単行本を必要に応じて参照されればよい．Fourier 解析については第 6 章で本書で必要とする最小限度な説明を与へてある．このような数学的基盤を主張することのよって来たる以所の，歴史的背景についても少々触れて置きたいと思う．これは情報理論のみならずそれを包含する情報科学が，そもそも何びとによって創られたかを考えることによって明確となる．今さらここで力説するまでもないとも思われるが，情報科学の基礎を与えた人々は Wiener，von Neumann，Shannon，Kolmogorov それに Turing などである．彼等はいずれも数学者でかつ応用数学者である．本書に密接な関係にあるのは前の 4 者である．彼等は，揃って数学の分野に画期的な理論を成し遂げ，さらに，汎く現在の情報科学の基礎を構築した天才達である．

およそ情報に関わりのある理論を展開する場合，これらの人々に直接，または間接に関与せねばならない．

実際，本書においては1巻，2巻を通じて，情報理論を数学の側に立って論じたものであるが，各部分の至る所でこの4人の天才に遭遇することになる．そのことは各巻の序論と目次を一覧されれば瞭然たるところであろう．本書との関連において，ここで上記の4天才の業績の大要を通覧一瞥する．

まず，Wiener については，彼の身に付けた広大な学問領域を背景として，彼自身が確立したサイバネティックスは情報科学の中心的な柱の一つとなっており，この名を冠した学術雑誌が幾種も刊行されている．これに至る数学的基礎は，いわゆる近代解析理論である．Lebesgue 積分に基づく一般調和解析，Brown 運動の理論を数学的に発展させ現在もなお確率論の中心的テーマとなっている Wiener 過程，さらにこの関連から発展した予測理論，自動制御論，学習理論等々．サイバネティックスに至るこれらの情報科学の主要な分野は Wiener の主導によって誕生し，研究の主要なテーマとなり，いよいよ重要性を増しており，この情報科学講座では Wiener のこれら諸理論が最も多く登場していると思われる．本書においても，第6章や第7章にも Wiener の仕事と関連のある事柄が論じられている．

von Neumann の情報科学への全般的な貢献は，Wiener と同様幅広く重要である．数学的立場からみるとき，彼の理論の背景とみなすのは Wiener の場合と同じく今世紀の初めに生まれた近代数学が基礎となる．彼は驚くべき洞察力・独創性とずば抜けて鋭い論理性と理解力，それにとても人間業とは思えぬ記憶力の持主で，彼が1920年代以降手掛けた数学上の足跡は何びとにも追従を許さぬ完璧に近いものであった．その基盤に立って量子力学・ゲーム理論・数理経済学・オートマトン理論・数理生物学等々に，画期的な理論体系をつくりあげた．また，プログラム内蔵方式電子計算機の創始者として，この分野に燦として輝く光を与えた計算機科学者でもある．このいくつもの最重要な分野が von Neumann という一個の人物の打ち立てたものであるということは正に神業の感があり，一つ一つの理論が多くの研究者にとって，今日なお，生涯を賭ける研究の対象となっている．彼の理論のいずれか一つでも目標にしている研究者は，日本流に表現して von Neumann 神社を建立しようと真面目に話合うことがある．それほど研究者から尊崇の念をもたれている．

彼の成果は膨大な範囲にわたるが，それらの基礎となるのは彼自身が確立した函数解析であり，具体的には Hilbert 空間論とそれに関わりのある作用素論・作用素代数（von Neumann 代数）の理論である．これらは本書に最も多く登場してくる数学的バックグランドである．第1巻付章4，第2巻付章のすべてが von Neumann の仕事に連なるものであり，それらと第6章以下すべての章の議論が深く関わっている．

Shannon は前の2者と比べると情報科学全般というよりは，情報理論として情報科学の基礎理論を誕生させ，それを構築したパイオニアである．彼の偉大さが，まず評価さ

れるのは，‘情報とは何か’の問に最も単純明解な答を与えたことである．Shannon の成功の背景には半世紀間にわたる通信工学の発展の積み重ねがあったと思われる．1895 年に Marconi が電磁波を通信に初めて利用してから，電気通信の歴史は 1920 年代に開花し，通信方式に関する多くの研究者を生み出した．のち，第 2 次大戦中に開発されたレーダーに伴って発展した通信技術に研究者の関心が高まり，Bell 研究所において一連のパルス変調方式が研究され，この過程で Shannon は情報をデジタル的に捉らえようという考えに立った．彼は初めに文字などの，数値とは本質的に異なるものの系列を研究対象にしたために，情報の量的把握が明確な形でなされたといえる（第 1，5，6 章）．彼は 1948 年に明解な公理系によって，系の曖昧さや不確定さでその系のもつ情報量を完全に捉え，公式化した（第 1 章）．これは．画期的なことといえるこれがエントロピーと名づけられる正のスカラー量であり，待望の情報量なのである．Wiener もこれと類似の着想を行ったが，この公理系には至らなかった．

このエントロピーはまさに物理学上の概念で，1865 年 Clausius がこれを導入し Boltzmann (1877 年)，Gibbs を経て熱力学の確立から統計力学へと進み，1920 年代に至って Nyquist, Hartley, Szilard それに von Neumann を経て遂に Shannon に至ったのである．エントロピーという物理学上の概念が，三つの条件からなる公理系によって特徴づけられることによって，遂に情報理論という全く新しい分野が構築されたわけで，これが必ず

$$S(p)=-\sum p_k \log p_k \quad \text{とか} \quad S(f)=-\int f \log f\,dt$$

という数理形式によって表される必然性は真に不可思議な思いがする（第 1 章）．偶然を支配する神々のなせる業なのであろうか．Shannon はこのエントロピー理論を基盤として種々なエントロピー解析を展開し，情報伝送としてのチャンネルの構成，その入力・出力空間の数学構造，特に，エントロピーという情報量を基準として，情報伝送の際の最適な効率を得るための符合化定理を完成し（第 5 章），情報理論という数学的には美しい，しかも広大な応用面をもつ価値ある領域を建設し，これを発展させたのである．数学・数理物理学・通信・制御・計算機科学等々，情報科学全般にもたらされた恩恵は計り知れない．この Shannon のエントロピー理論は本書 1・2 巻を組み立てる中心的な流れとなっている．

4 人目の Kolmogorov の話に移ろう．彼の研究は総合すると 4 人の中で最も数学的色彩が強い．彼は Shannon の情報理論をさらに精密なものとし，数学的に発展させ，彼自身が 1930 年代に達成した近代確率論の上に立って，Shannon のエントロピー理論を見事な完備された数学的体系にまとめあげた（第 3 章）．これによってエントロピー理論そのものは，数学においても重要な地位を獲得するに至った．しかも数学の他の領域にも大きな影響を与え，情報理論を離れて確率論・エルゴード理論・近似理論・トポロジー・多様体論など，現代の数学の様々な領域に発展しようとしている．また，ここで見逃せ

ないのは，情報理論との関連で彼が導入した ε-エントロピー理論である．これを用いて彼とその弟子は 1900 年以来，半世紀にわたって懸案であった Hilbert 第 13 問題を解決し，情報理論が純粋の数学の分野にも決定的影響を与え得ることを示した（1956 年；第 4 章）．それより以前に，彼は予測理論を展開し，線形予測の一般理論，非線形予測の数学的分析，また信号の予測として，位相的近似法を用い雑音を伴う信号の集団から必要な信号を高度の信頼度で予測する問題を明確な数学的手法で展開し，情報理論とその周辺領域で注目すべき成果をあげている．本書では，予測理論に関する部分は（Wiener の理論と共に）触れなかった．

以上，世紀の 4 巨人が情報科学の各分野において，いかに主役を演じたかを説明してきたが，読者は，本書で論じた数学を基盤とした諸理論の重要性を，多少なりとも理解して頂けるならば幸いである．

われわれの目標とする所は，なおも続き，数理生物学，例えば，DNA→RNA→蛋白質の合成に至る分子生物学上の遺伝情報というテーマについても，DNA を構成する 4 つの信号を alphabets A として，さらに A^{Z} をメッセージ空間として情報源を構成し，上述の合成系を第 5 章で論じたチャンネル（信号の伝達系）構成に適用し，理論を構築すると，どのような展開がなされるかなど興味あるところである．また，第 6 章で論じた Fourier 変換をさらに発展さすことによって，Radon 変換論が展開される．これは，Cormack や Hounfield（1973 年）が医療数理工学上の重要な分野にまで発展させ，その結果が，CT スキャンの完成という数学上の，特に，函数解析的な基礎理論の応用が実際に人類の医療面で際立った貢献をしたことを，ここで特記しておきたい．これはまさに応用数学の勝利ともいうべきものである．これら一連の理論は全く触れなかったが，Wiener や Kolmogorov 理論に関する話題で本書で触れなかった部分と同様に，さらに将来の目標として研究し，発展させ，いずれ世に出したいと念願している．

昭和 58 年　晩秋の頃

著　者

索　引

O

P

Q

R

S

X

Y

Z

Memorandum

Memorandum

著 者 紹 介

梅垣(うめがき) 壽春(ひさはる)

昭和 24 年　東北帝国大学理学部数学科卒業
専　　攻　応用函数解析，エントロピー論，信号解析，非可換解析
現　　在　東京工業大学理学部教授　理学博士
主要著書　「情報理論の進歩」(共編)(岩波書店)
Seminar on Applied Functional Analysis—Information Theory and Related Topics—First (1978 年)～Fifth (1982 年)(編)
「確率論的エントロピー」(共著)(共立出版)

大矢(おおや) 雅則(まさのり)

昭和 45 年　東京大学理学部物理学科卒業
昭和 51 年　Rochester 大学大学院修了
専　　攻　エントロピー論，数理物理学，函数解析
現　　在　東京理科大学理工学部助教授 Ph. D (理学博士)
主要著書　「確率論的エントロピー」(共著)(共立出版)

情報科学講座A・2・7
量子論的エントロピー
—情報理論の函数解析的基礎 2—

定価 3000 円

検印廃止

© 1984

昭和 59 年 4 月 1 日　初版 1 刷発行

編集代表者　北川敏男
喜安善市

発行者　南條正男
東京都文京区小日向4丁目6番19号

印刷者　大久保絢史
東京都新宿区市ケ谷本村町 27 番地

DNC 007.1, 415.5, 548.1

発行所　東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話 東京 947 局 2511 番 (代表)
郵便番号 112 振替 東京 1-57035 番
共立出版株式会社

印刷・新日本印刷　製本・関山製本　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

ISBN 4-320-02210-6